

Math. P.

710

100

Math. P.
190 md

Grunert, J. A.,

Loxodromische Trigonometrie.

Ein Beitrag

zur Nautik.

Von

Johann August Grunert,

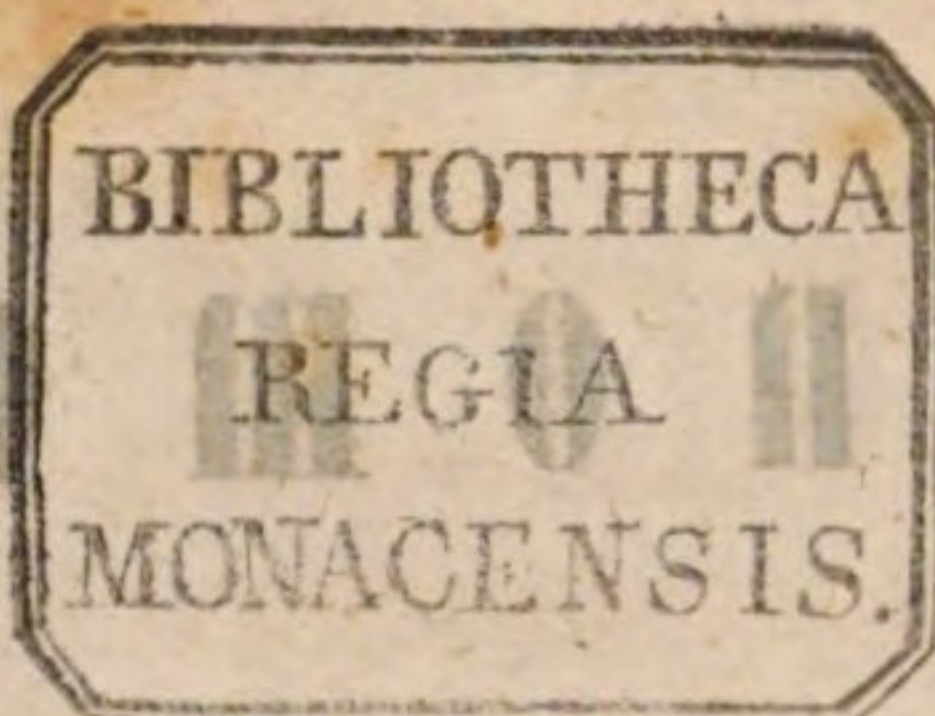
Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Greifswald, Ehrenmitgliede der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Erfurt, der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften zu Hamburg und der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtigem Mitgliede der Königlich Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag, correspondirendem Mitgliede der Königlich Baierischen Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissenschaften zu Upsala und der Kaiserlich Oesterreichischen Akademie der Wissenschaften zu Wien, ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Danzig, Halle, Marburg und Leipzig.

Leipzig, 1849.

Verlag von E. B. Schwickert.

462. B.

Lexikon



Triginta

Ein Beitrag

zur Natur

von

Johann August Gruner

Doctor der Philosophie und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu
Göttingen, Ehrenmitglied der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin,
der Gesellschaft zur Förderung der naturhistorischen Wissenschaften zu Hamburg und der
historischen Gesellschaft zu Leipzig, auswärtiges Mitglied der Königlich Preussischen
Akademie der Wissenschaften zu Berlin, correspondirendes Mitglied der Königlich Bayerischen
Akademie der Wissenschaften zu München, der Königlich Schwedischen Societät der Wissen-
schaften zu Upsala und der Kaiserlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Wien,
ordentlichem Mitgliede der naturforschenden Gesellschaften zu Bonn, Halle, Marburg
und Leipzig.

Leipzig, 1819.

Verlag von E. B. Schwickert.

V o r r e d e.

Mit dem Wunsche und in der Hoffnung, dass diese Schrift sowohl für den Mathematiker, als auch für den wissenschaftlich gebildeten Seemann von Interesse sein werde, will ich mir erlauben, im Folgenden mich in der Kürze über den eigentlichen Zweck derselben auszusprechen, um den Leser gleich von vorn herein so viel als möglich auf den richtigen Standpunkt zu stellen, aus welchem er dieselbe zu beurtheilen hat.

Der Schiffer bestimmt seinen Weg und seinen Ort auf dem Meere auf doppelte Weise: einmal durch Messungen auf der Oberfläche des Meeres mittelst des Logs (oder der Logge), des Log- oder Sand- Glases und des Kompasses; dann durch Messungen am Himmel mit dem Spiegel- Sextanten, dem Spiegel- Kreise oder dem Prismen- Kreise und dem Chronometer oder der Seeuhr. Die erste Methode entspricht gewissermassen den geodätischen Messungen auf der Oberfläche der Erde, die zweite den astronomischen Ortsbestimmungen. Beide Methoden zusammen bilden den Theil der Nautik, welchen man gewöhnlich die Steuermannskunde nennt, wel-

che sehr wohl zu unterscheiden ist von der sogenannten Schifferkunde, worunter man vorzugsweise die Schiffsbaukunst, die Zurüstungskunde, das Schiffsmanöuvre und die Ankerkunde versteht. Der astronomische Theil der Steuermannskunde ist unter dem Namen der nautischen Astronomie schon vielfach behandelt worden, und wir besitzen bereits mehrere vortreffliche Lehrbücher derselben, welche ich hier nicht einzeln namhaft machen will, da sie den Seeleuten bekannt genug sind; jedenfalls nimmt aber die neue Ausgabe des Hamburger Schifffahrtslehrbuchs einen vorzüglichen Platz unter denselben ein. Der erste der beiden vorher namhaft gemachten Theile der Steuermannskunde ist dagegen bis jetzt weit weniger, — in einer streng systematischen und in dieser Beziehung erschöpfenden Darstellung, so viel ich weiss, noch gar nicht, — behandelt worden; in den Schifffahrtslehrbüchern kommen nur einzelne dahin gehörende Aufgaben vor, welche vorzugsweise auf der See Anwendung finden; und überdies pflegt noch zwischen der sogenannten Planschifffahrt und der runden Schifffahrt unterschieden zu werden, worüber ich nur in der Kürze und ganz im Allgemeinen bemerken will, dass man die Oberfläche der Erde im ersten Falle als eine Ebene, im zweiten Falle als eine Kugelfläche oder, was sie eigentlich ist, als die Oberfläche eines Umdrehungsellipsoids, betrachtet.

Diesen letzteren, so eben näher besprochenen Theil der Steuermannskunde, unter Voraussetzung der sphäroidischen Gestalt der Erde, in erschöpfender systematischer Behandlung darzustellen, ist der Zweck der vorliegenden Schrift. Alle Aufgaben der höheren Geodäsie werden bekanntlich in einer besonderen mathematischen Wissenschaft, welche man die „Sphäroidische Trigonometrie“ nennt, vollständig aufgelöst. Unter einem sphäroidischen Dreiecke versteht man aber ein zwischen drei Punkten auf der Oberfläche der sphäroidischen Erde als seinen Spitzen liegendes Dreieck, dessen eine Spitze immer der eine Erdpol ist, welcher mit den

beiden anderen Spitzen durch elliptische Meridianbogen verbunden ist, und die beiden anderen Spitzen selbst sind durch eine auf der Oberfläche des Erdellipsoids gezogene geodätische oder kürzeste Linie mit einander verbunden. Jede Aufgabe der höheren Geodäsie lässt sich auf ein Problem der sphäroidischen Trigonometrie zurückführen, indem man immer drei Stücke eines sphäroidischen Dreiecks als gegeben betrachtet, und daraus die drei übrigen Stücke desselben durch Rechnung ableitet, wo mir des Weiteren wegen wohl auf mein ausführliches Werk über „Sphäroidische Trigonometrie. Berlin. 1833. 4.“ zu verweisen erlaubt sein wird. Der Schiffer kann die geodätische oder kürzeste Linie des Geodäten (im Allgemeinen) nicht gebrauchen, weil er immer eine längere Zeit denselben Curs beizubehalten genöthigt ist, und setzt daher an die Stelle der geodätischen oder kürzesten Linie des Geodäten eine andere Linie, welche alle Meridiane des Erdellipsoids unter gleichen Winkeln schneidet, und jedem Mathematiker und jedem wissenschaftlichen Seemanne unter dem Namen der loxodromischen Linie oder der Rhumb-Linie (auf dem Ellipsoid) vollständig bekannt ist. Hieraus entspringt von selbst die Idee eines loxodromischen Dreiecks, worunter ich, ganz ähnlich dem sphäroidischen Dreiecke, ein zwischen drei Punkten auf der Oberfläche des Erdellipsoids als seinen Spitzen liegendes Dreieck verstehe, dessen eine Spitze immer in dem einen Erdpole liegt, welcher mit den beiden anderen Spitzen durch elliptische Meridianbogen verbunden ist, und die beiden anderen Spitzen selbst sind durch eine Loxodrome mit einander verbunden. Da die Loxodrome gegen alle Meridiane unter gleichen Winkeln geneigt ist, so sind in einem loxodromischen Dreiecke nicht sechs Stücke, wie in einem sphäroidischen Dreiecke, sondern nur fünf Stücke zu betrachten, nämlich die Breiten seiner beiden nicht mit dem Erdpole zusammenfallenden Spitzen, die Längendifferenz dieser beiden Spitzen, der Curs (Winkel der Rhumb-Linie mit den Meri-

dianen) und die sogenannte gesegelte Distanz, d. h. die Loxodrome oder Rhumb-Linie, welche die beiden in Rede stehenden Spitzen mit einander verbindet; und wenn drei dieser fünf Stücke eines loxodromischen Dreiecks gegeben sind, so können immer die beiden anderen Stücke desselben durch Rechnung gefunden werden, was ich, wie gewöhnlich in der Trigonometrie, die Auflösung des loxodromischen Dreiecks nenne. Mit der vollständigen Auflösung des loxodromischen Dreiecks in allen einzelnen möglichen Fällen beschäftigt sich aber eine eigne neue mathematische Wissenschaft, welcher ich den Namen „Loxodromische Trigonometrie“ gegeben habe, was freilich den von der Ebene, der Kugel und dem Sphäroid hergenommenen bekannten Namen „Ebene Trigonometrie,“ „Sphärische Trigonometrie“ und „Sphäroidische Trigonometrie“ nicht entspricht, aber wohl schon darin seine Rechtfertigung finden wird, dass die französischen Mathematiker die Wissenschaft, welche wir „Ebene Trigonometrie“ nennen, allgemein mit dem Namen „Geradlinige Trigonometrie (Trigonométrie rectiligne)“ zu belegen pflegen. Jede nicht in die nautische Astronomie gehörende Aufgabe der Steuermannskunde findet ihre vollständige Auflösung in der Loxodromischen Trigonometrie, wobei die Erde immer als ein Umdrehungsellipsoid betrachtet wird, von dem sich aber der Uebergang zur Kugel leicht machen lässt, wenn man die beiden Axen der erzeugenden Ellipse einander gleich setzt, oder die Excentricität als verschwindend betrachtet; und da die sogenannten Seekarten mit wachsenden Breiten (Mercator's Karten) ein für den Seemann sehr wichtiges graphisches Hülfsmittel zur Auflösung der in Rede stehenden Aufgaben sind, eine Auflösungs-methode, welche er in seiner Kunstsprache vorzugsweise mit dem Namen „Besteck setzen“ oder „Absetzen“ bezeichnet, so enthält die Loxodromische Trigonometrie natürlich auch die Theorie der sogenannten Karten mit wachsenden Breiten, so wie die Theorie der Tafel der Meridionaltheile, auf welche

sich die Verzeichnung dieser Karten gründet, und anderer Erleichterungen der Rechnungen vermittelnder Tafeln.

Was also die „Ebene Trigonometrie“ für die niedere Geometrie oder die Feldmesskunst, die „Sphärische Trigonometrie“ für die höhere Geodäsie und die „Sphäroidische Trigonometrie“ für die höchste Geodäsie ist, ganz dasselbe soll die „Loxodromische Trigonometrie“ für die Nautik, insbesondere für die Steuermannskunde sein, dieselbe soll die wissenschaftliche Grundlage der Steuermannskunde bilden, insofern und insoweit nämlich die Operationen der letzteren nicht dem Gebiete der nautischen Astronomie, die hier ganz auszuschliessen ist, anheim fallen, und bloss auf den Gebrauch des Logs oder der Logge, des Log - Glases und des Kompasses gegründet sind.

Mit Zugrundelegung der neuesten Bestimmungen der Dimensionen des Erdellipsoids neu berechnete Tafeln der in dieser Schrift durch $\Phi(\varpi)$ (Meridionaltheile) und $\Gamma(\varpi)$ bezeichneten Functionen hoffe ich derselben noch folgen zu lassen.

Der Aufschwung, welchen in der jetzigen bewegten Zeit, wo Deutschland das Glück seiner Zukunft vorzugsweise mit auf die Herstellung einer den übrigen seefahrenden Nationen Achtung gebietenden Flotte gründet, die nautischen Wissenschaften nothwendig nehmen werden und müssen, verpflichtet die deutschen Gelehrten, ihre Kräfte mehr als bisher diesem Zweige des menschlichen Wissens zu widmen. Der Unterzeichnete, aus besonderer Neigung schon lange mit dem Studium der nautischen Wissenschaften beschäftigt, macht daher in der vorliegenden nur kleinen Schrift einen ersten Versuch, einem sehr wichtigen Theile der Nautik eine streng wissenschaftliche systematische Gestalt zu geben, oder vielmehr eine neue mathematische Wissenschaft zu begründen, welche die vollständige wissenschaftliche Grundlage des einen der beiden Haupttheile enthält, in welche sich die gesammte Steuermannskunde füglich scheiden lässt, hofft aber schliesslich die weiteren Früchte seiner nautischen Studien und Ar-

beiten dem Publikum zunächst bald in einem wenigstens auf zwei Bände berechneten grösseren Werke über die Principien der gesamten Schiffsbaukunst und des Schiffsmanöuvres, mit fortwährender Rücksicht auf das Praktische, vorlegen zu können, worin er, was insbesondere die Schiffsbaukunst betrifft, wenigstens so viel zu leisten hofft, dass durch die in diesem Werke entwickelten Principien eine vollständige wissenschaftlich strenge Beurtheilung vorgelegter Risse und Entwürfe von zu erbauenden Schiffen, in Bezug auf alle von denselben zu erfüllende Bedingungen, möglich gemacht wird, was die bis jetzt erschienenen Werke und Abhandlungen über diesen wichtigen und interessanten Gegenstand von Bouguer, Euler, Chapman, Vial du Clairbois, Don George Juan (de Ulloa), Duhamel de Monceau, Augustin Creuze (Naval Architecture. Edinburgh. 1841.4., wohl das neueste englische Werk über die Schiffsbaukunst, welches auch eine ziemlich ausführliche Geschichte derselben enthält), Atwood und Anderen, so viel Schönes dieselben auch enthalten, noch nicht mit dem für die Praxis erforderlichen Grade von Vollständigkeit und zugleich auch von wissenschaftlicher Strenge und Genauigkeit leisten dürften.

Greifswald,
im Februar 1849.

J. A. Grunert.

Einleitung.

§. 1.

Diese Einleitung ist bestimmt, der loxodromischen Trigonometrie einige für dieselbe wichtige, eigentlich jedoch der mathematischen Geographie angehörende Begriffe und Formeln vor auszuschicken.

Die Erde betrachten wir im Folgenden als ein durch Umdrehung einer Ellipse um ihre kleine Axe erzeugtes, von einer Kugel jedoch nur wenig abweichendes Sphäroid, welches das Erdellipsoid oder Erdsphäroid genannt werden soll. Die kleine Axe der erzeugenden Ellipse heisst die Axe, die beiden Endpunkte derselben heissen die Pole des Erdellipsoids, und der Mittelpunkt der erzeugenden Ellipse wird der Mittelpunkt oder das Centrum desselben genannt. Der Bruch, welchen man erhält, wenn man den Ueberschuss der grossen Halbaxe der erzeugenden Ellipse über deren kleine Halbaxe durch die grosse Halbaxe dividirt, heisst die Abplattung des Erdellipsoids, so dass also, wenn die grosse und kleine Halbaxe der erzeugenden Ellipse respective durch a und b bezeichnet werden, der Bruch $\frac{a-b}{a}$ die Abplattung des Erdellipsoids ist.

§. 2.

Der Umfang des von der grossen Axe der erzeugenden Ellipse bei der Umdrehung derselben um ihre kleine Axe beschriebenen Kreises heisst der Aequator, und jeder Kreis, in welchem die Oberfläche des Erdellipsoids von einer der Ebene des Aequators parallelen Ebene geschnitten wird, wird ein Parallelkreis, eigentlich ein Parallelkreis des Aequators, genannt.

Der Aequator theilt die Oberfläche des Erdellipsoids in zwei Hälften, von denen die eine die positive Hälfte, die andere

die negative Hälfte des Erdellipsoids genannt werden soll. Die in diesen beiden Hälften liegenden Pole des Erdellipsoids heissen respective der positive Pol und der negative Pol desselben.

§. 3.

Wenn die Oberfläche des Erdellipsoids von einer durch seine Axe gelegten Ebene geschnitten wird, so ist der Schnitt jederzeit eine der erzeugenden Ellipse gleiche Ellipse. Die zwischen den beiden Polen liegenden Hälften solcher Ellipsen werden Meridiane genannt, und jeder Punkt auf der Oberfläche des Erdellipsoids hat seinen besonderen oder bestimmten, durch ihn gehenden Meridian.

Alle Meridiane werden von einem bestimmten, an sich übrigens willkürlichen Meridiane, welcher der erste Meridian genannt wird, an, immer nach derselben Richtung hin, rings um das Erdellipsoid herum gezählt so dass jedem Punkte des Aequators ein besonderer Meridian entspricht.

§. 4.

Die Breite eines Punktes auf der Oberfläche des Erdellipsoids ist der 90° nicht übersteigende, und, jenachdem der in Rede stehende Punkt in der positiven oder negativen Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Winkel, unter welchem die, dem in Rede stehenden Punkte entsprechende Normale des Erdellipsoids gegen die Ebene des Aequators geneigt ist. Dass übrigens die einem gewissen Punkte der Oberfläche des Erdellipsoids entsprechende Normale dieser Oberfläche immer in der Ebene des durch den in Rede stehenden Punkt gehenden Meridians liegt, ist eine Eigenschaft jedes Umdrehungsellipsoids, welche hier als bekannt vorausgesetzt werden kann. Die Breite eines Punktes auf der Oberfläche des Erdellipsoids ist aber hiernach auch der 90° nicht übersteigende, und, jenachdem dieser Punkt in der positiven oder negativen Hälfte des Erdellipsoids liegt, als positiv oder als negativ betrachtete Winkel, unter welchem die dem in Rede stehenden Punkte entsprechende Normale seines Meridians gegen die grosse Axe dieses Meridians geneigt ist.

Wenn man sich in das Erdellipsoid aus seinem Mittelpunkt als Mittelpunkt und mit seiner Axe als Durchmesser eine Kugel beschrieben denkt, so heisst der, 90° nicht übersteigende Winkel, unter

welchem der durch einen gewissen Punkt auf der Oberfläche dieser Kugel gezogene Halbmesser derselben gegen die Ebene des Aequators geneigt ist, die reducirte Breite aller der Punkte auf der Oberfläche des Erdellipsoids, welche von der Ebene des Aequators eben so weit wie der in Rede stehende Punkt auf der Oberfläche der Kugel entfernt sind, wobei man nur noch zu beachten hat, dass die reducirten Breiten immer mit demselben Vorzeichen wie die entsprechenden wahren Breiten genommen werden.

§. 5.

Die Länge eines Punktes auf der Oberfläche des Erdellipsoids ist der zwischen dem ersten Meridiane und dem Meridiane dieses Punktes liegende, von dem ersten Meridiane an nach der Richtung hin, nach welcher die Meridiane rings um das Erdellipsoid herum gezählt werden, von 0^0 bis 360^0 gezählte Bogen des Aequators, wobei kaum noch besonders bemerkt zu werden braucht, dass nach diesem Begriffe die Längen stets positiv sind.

Die Längendifferenz zweier Punkte A und B auf der Oberfläche des Erdellipsoids in Bezug auf den Punkt A ist die Länge des Punktes B nach dem vorhergehenden allgemeinen Begriffe der Länge, wenn man den Meridian des Punktes A als ersten Meridian annimmt; und eben so ist die Längendifferenz der beiden Punkte A und B auf der Oberfläche des Erdellipsoids in Bezug auf den Punkt B die Länge des Punktes A nach dem vorhergehenden allgemeinen Begriffe der Länge, wenn man den Meridian des Punktes B als ersten Meridian annimmt. Dass hiernach auch die Längendifferenzen stets positiv sind und nach der Richtung der Längen von 0^0 bis 360^0 gezählt werden, versteht sich von selbst.

§. 6.

Durch den Mittelpunkt des Erdellipsoids als Anfang wollen wir jetzt ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz legen. Die Ebene des Aequators sei die Ebene der xy , und also die Axe des Erdellipsoids die Axe der z . Der positive Theil der Axe der x sei die Durchschnittslinie der Ebene des ersten Meridians mit der Ebene des Aequators, d. h. der nach dem Punkte 0^0 des Aequators gerichtete Halbmesser desselben. Der positive Theil der Axe der y sei die Durchschnittslinie der Ebene des dem neunzigsten Grade der Länge entsprechenden Meridians mit der Ebene des Aequators,

d. h. der nach dem Punkte 90° des Aequators gerichtete Halbmesser desselben. Der positive Theil der Axe der z sei von dem Mittelpunkte des Erdellipsoids nach dem positiven Pole desselben gerichtet.

Bezeichnen wir nun die beiden Halbaxen des Erdellipsoids wie schon oben durch a und b , so dass a die grosse, b die kleine Halbaxe bezeichnet, so erhellet mittelst einer ganz einfachen geometrischen Betrachtung auf der Stelle, dass

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Oberfläche des Erdellipsoids ist.

§. 7.

Es sei nun (uvw) ein beliebiger Punkt auf der Oberfläche des Erdellipsoids, so ist nach der Gleichung 1)

$$2) \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1,$$

und die Gleichungen der durch den Punkt (uvw) gehenden Normale der Oberfläche des Erdellipsoids sind nach den Principien der analytischen Geometrie:

$$3) \begin{cases} x - u = -\frac{\partial w}{\partial u} (z - w), \\ y - v = -\frac{\partial w}{\partial v} (z - w); \end{cases}$$

wo die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial w}{\partial u} \text{ und } \frac{\partial w}{\partial v}$$

aus der Gleichung 2) zu entwickeln sind. Diese Gleichung giebt aber durch partielle Differentiation nach u und nach v auf der Stelle:

$$\frac{u}{a^2} + \frac{w}{b^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial u} = 0, \quad \frac{v}{a^2} + \frac{w}{b^2} \cdot \frac{\partial w}{\partial v} = 0;$$

also

$$4) \frac{\partial w}{\partial u} = -\frac{b^2 u}{a^2 w}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{b^2 v}{a^2 w};$$

und die Gleichungen der Normale der Oberfläche des Erdellipsoids in dem Punkte (uvw) sind folglich nach 3):

$$5) \begin{cases} x - u = \frac{b^2 u}{a^2 w} (z - w), \\ y - v = \frac{b^2 v}{a^2 w} (z - w). \end{cases}$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunktes dieser Normale mit der Ebene des Aequators, d. i. mit der Ebene der xy , durch $u_1, v_1, 0$; so ist nach 5)

$$6) u_1 - u = -\frac{b^2}{a^2} u, \quad v_1 - v = -\frac{b^2}{a^2} v;$$

also

$$7) \begin{cases} u_1 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) u = \frac{a^2 - b^2}{a^2} u, \\ v_1 = \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) v = \frac{a^2 - b^2}{a^2} v; \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$8) e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

setzen:

$$9) u_1 = e^2 u, \quad v_1 = e^2 v.$$

Bezeichnen wir nun die Entfernung der Punkte (uvw) und $(u_1 v_1 0)$ von einander durch R , so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$R^2 = (u_1 - u)^2 + (v_1 - v)^2 + w^2,$$

also nach 6)

$$10) R^2 = \frac{b^4}{a^4} (u^2 + v^2) + w^2,$$

oder

$$11) R = \sqrt{\frac{b^4}{a^4} (u^2 + v^2) + w^2},$$

oder auch

$$12) R = \frac{\sqrt{b^4 (u^2 + v^2) + a^4 w^2}}{a^2}.$$

Bezeichnen wir ferner die Länge und Breite des Punktes (uvw) durch L, B ; so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$13) \begin{cases} u = \cos L \cdot \sqrt{u^2 + v^2}, \\ v = \sin L \cdot \sqrt{u^2 + v^2}, \\ w = \sin B \cdot \sqrt{\frac{b^4}{a^4} (u^2 + v^2) + w^2}. \end{cases}$$

Aus der dritten Gleichung erhält man sogleich

$$\frac{b^4}{a^4} (u^2 + v^2) \sin B^2 = w^2 \cos B^2,$$

also

$$w^2 = \frac{b^4}{a^4} (u^2 + v^2) \tan B^2, \quad u^2 + v^2 = \frac{a^4}{b^4} w^2 \cot B^2.$$

Verbindet man hiermit die aus dem Obigen bekannte Gleichung

$$\frac{u^2 + v^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1,$$

so kann man die Grössen $u^2 + v^2$ und w^2 bestimmen, und erhält ohne Schwierigkeit

$$u^2 + v^2 = \frac{a^2}{1 + \frac{b^2}{a^2} \tan B^2}, \quad w^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cot B^2};$$

oder

$$u^2 + v^2 = \frac{a^4 \cos B^2}{a^2 \cos B^2 + b^2 \sin B^2}, \quad w^2 = \frac{b^4 \sin B^2}{a^2 \cos B^2 + b^2 \sin B^2};$$

oder

$$u^2 + v^2 = \frac{a^4 \cos B^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \sin B^2} = \frac{a^4 \cos B^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cos B^2},$$

$$w^2 = \frac{b^4 \sin B^2}{a^2 - (a^2 - b^2) \sin B^2} = \frac{b^4 \sin B^2}{b^2 + (a^2 - b^2) \cos B^2};$$

oder, wenn wir

$$14) \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

setzen :

$$u^2 + v^2 = \frac{a^2 \cos B^2}{1 - \varepsilon^2 \sin B^2} = \frac{a^4 \cos B^2}{b^2 (1 + \varepsilon^2 \cos B^2)},$$

$$w^2 = \frac{b^4 \sin B^2}{a^2 (1 - \varepsilon^2 \sin B^2)} = \frac{b^2 \sin B^2}{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}.$$

Weil nun $\cos B$ stets positiv ist, und w und $\sin B$ offenbar immer gleiche Vorzeichen haben, so ist in völliger Allgemeinheit:

$$15) \begin{cases} \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{a^2 \cos B}{b \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}, \\ w = \frac{b^2 \sin B}{a \sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b \sin B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}. \end{cases}$$

Weil aber nach 8) und 14)

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 - e^2, \quad \frac{a^2}{b^2} = 1 + \varepsilon^2$$

ist, so ist auch

$$16) \begin{cases} \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{a \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b(1 + \varepsilon^2) \cos B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}, \\ w = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b \sin B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}; \end{cases}$$

und folglich nach 13):

$$17) \begin{cases} u = \frac{a \cos L \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b(1 + \varepsilon^2) \cos L \cos B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}, \\ v = \frac{a \sin L \cos B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b(1 + \varepsilon^2) \sin L \cos B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}, \\ w = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{\sqrt{1 - e^2 \sin B^2}} = \frac{b \sin B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir den von dem Mittelpunkte des Erdellipsoids nach dem Punkte (uvw) gezogenen Halbmesser desselben durch r , so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2},$$

also, wie sich aus den Formeln 17) leicht ergibt:

$$18) \begin{aligned} r &= a \sqrt{\frac{1 - e^2(2 - e^2) \sin B^2}{1 - e^2 \sin B^2}} \\ &= b \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2(2 + \varepsilon^2) \cos B^2}{1 + \varepsilon^2 \cos B^2}}. \end{aligned}$$

§. 8.

Bezeichnen wir die reducirte Breite des Punktes (uvw) durch $\mathfrak{B}$, so ist in Folge des aus §. 4. bekannten allgemeinen Begriffs der reducirten Breite

$$w = b \sin \mathfrak{B},$$

wobei man zu beachten hat, dass w , B , $\mathfrak{B}$ stets gleiche Vorzeichen haben. Weil nun

$$\cot \mathfrak{B}^2 = \frac{1 - \sin \mathfrak{B}^2}{\sin \mathfrak{B}^2}$$

ist, so ist

$$\cot \mathfrak{B}^2 = \frac{1 - \frac{w^2}{b^2}}{\frac{w^2}{b^2}}.$$

Nach §. 7. ist aber

$$w^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cot B^2}, \quad \frac{w^2}{b^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cot B^2}.$$

Führt man dies in den vorhergehenden Ausdruck von $\cot \mathfrak{B}^2$ ein, so erhält man

$$\cot \mathfrak{B}^2 = \frac{a^2}{b^2} \cot B^2;$$

also, weil B und $\mathfrak{B}$ stets gleiche Vorzeichen haben:

$$19) \cot \mathfrak{B} = \frac{a}{b} \cot B, \quad \cot B = \frac{b}{a} \cot \mathfrak{B}$$

oder

$$20) \tan \mathfrak{B} = \frac{b}{a} \tan B, \quad \tan B = \frac{a}{b} \tan \mathfrak{B}.$$

Mittelst dieser Formeln lässt sich leicht aus der wahren Breite die reducirte Breite, oder umgekehrt aus der reducirten Breite die wahre Breite finden.

Weil übrigens

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{a}{b} = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

ist, so ist auch

$$21) \begin{cases} \tan \mathfrak{B} = \tan B \cdot \sqrt{1 - e^2} = \frac{\tan B}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \\ \tan B = \tan \mathfrak{B} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2} = \frac{\tan \mathfrak{B}}{\sqrt{1 - e^2}}; \end{cases}$$

oder durch Entwicklung in Reihen nach dem Binomischen Lehrsatz:

$$22) \begin{cases} \text{tang } \mathfrak{B} = \text{tang } B \cdot (1 - \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{8} e^4 - \dots) \\ \quad = \text{tang } B \cdot (1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 + \frac{3}{8} \varepsilon^4 - \dots), \\ \text{tang } B = \text{tang } \mathfrak{B} \cdot (1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{8} \varepsilon^4 + \dots) \\ \quad = \text{tang } \mathfrak{B} \cdot (1 + \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{8} e^4 + \dots). \end{cases}$$

Zweckmässige Näherungsformeln zur Berechnung der reducirten Breite aus der wahren Breite, oder umgekehrt der wahren Breite aus der reducirten Breite, erhält man auf folgende Art.

Weil nach dem Vorhergehenden

$$\text{tang } \mathfrak{B} = \frac{b}{a} \text{tang } B$$

ist, so ist

$$\text{tang } B + \text{tang } \mathfrak{B} = \frac{a + b}{a} \text{tang } B,$$

also

$$\frac{\text{tang } B - \text{tang } \mathfrak{B}}{\text{tang } B + \text{tang } \mathfrak{B}} = \frac{a - b}{a + b},$$

oder, wie hieraus leicht nach bekannten goniometrischen Formeln sich ergibt:

$$\frac{\sin(B - \mathfrak{B})}{\sin(B + \mathfrak{B})} = \frac{a - b}{a + b},$$

also

$$\sin(B - \mathfrak{B}) = \frac{a - b}{a + b} \sin(B + \mathfrak{B}).$$

Weil nun

$$B + \mathfrak{B} = 2B - (B - \mathfrak{B}) = 2\mathfrak{B} + (B - \mathfrak{B})$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} \sin(B - \mathfrak{B}) &= \frac{a - b}{a + b} \sin \{ 2B - (B - \mathfrak{B}) \} \\ &= \frac{a - b}{a + b} \sin \{ 2\mathfrak{B} + (B - \mathfrak{B}) \}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \sin(B - \mathfrak{B}) &= \frac{a - b}{a + b} \{ \sin 2B \cos(B - \mathfrak{B}) - \cos 2B \sin(B - \mathfrak{B}) \} \\ &= \frac{a - b}{a + b} \{ \sin 2\mathfrak{B} \cos(B - \mathfrak{B}) + \cos 2\mathfrak{B} \sin(B - \mathfrak{B}) \}. \end{aligned}$$

Der Bruch $\frac{b}{a}$ oder $\frac{a}{b}$ kommt der Einheit sehr nahe; also sind

$$\frac{a-b}{a+b} \text{ und } B-\mathfrak{B}$$

der Null sehr nahe kommende Grössen. Daher ist nach dem Obigen, wie leicht aus den bekannten goniometrischen Reihen sich ergibt, mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf die der Null sehr nahe kommenden Grössen

$$\frac{a-b}{a+b} \text{ und } B-\mathfrak{B}$$

von der zweiten Ordnung sind:

$$23) \quad B-\mathfrak{B} = \frac{a-b}{a+b} \sin 2B = \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B},$$

also

$$24) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \sin 2B, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B}; \end{cases}$$

dagegen ist erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf die der Null sehr nahe kommenden Grössen

$$\frac{a-b}{a+b} \text{ und } B-\mathfrak{B}$$

von der dritten Ordnung sind:

$$\begin{aligned} B-\mathfrak{B} &= \frac{a-b}{a+b} \{ \sin 2B - (B-\mathfrak{B}) \cos 2B \} \\ &= \frac{a-b}{a+b} \{ \sin 2\mathfrak{B} + (B-\mathfrak{B}) \cos 2\mathfrak{B} \}, \end{aligned}$$

also

$$(1 + \frac{a-b}{a+b} \cos 2B) (B-\mathfrak{B}) = \frac{a-b}{a+b} \sin 2B,$$

$$(1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\mathfrak{B}) (B-\mathfrak{B}) = \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B};$$

folglich

$$25) \quad \begin{cases} B-\mathfrak{B} = \frac{\frac{a-b}{a+b} \sin 2B}{1 + \frac{a-b}{a+b} \cos 2B} = \frac{\frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B}}{1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\mathfrak{B}}, \end{cases}$$

oder

$$26) \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{\frac{a-b}{a+b} \sin 2B}{1 + \frac{a-b}{a+b} \cos 2B}, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{\frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B}}{1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2\mathfrak{B}}. \end{cases}$$

Auch ist

$$27) \begin{aligned} B - \mathfrak{B} &= \frac{a-b}{a+b} \sin 2B \left\{ 1 - \frac{a-b}{a+b} \cos 2B + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cos 2B^2 - \dots \right\} \\ &= \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B} \left\{ 1 + \frac{a-b}{a+b} \cos 2\mathfrak{B} + \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cos 2\mathfrak{B}^2 + \dots \right\}, \end{aligned}$$

folglich wieder mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf die der Null sehr nahe kommende Grösse $\frac{a-b}{a+b}$ von der dritten Ordnung sind:

$$28) \begin{aligned} B - \mathfrak{B} &= \frac{a-b}{a+b} \sin 2B - \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \sin 4B \\ &= \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \sin 4\mathfrak{B}, \end{aligned}$$

also

$$29) \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \sin 2B + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \sin 4B, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \sin 2\mathfrak{B} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \sin 4\mathfrak{B}. \end{cases}$$

Soll $B - \mathfrak{B}$ in Minuten ausgedrückt sein, so muss man setzen:

$$30) B - \mathfrak{B} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2B}{\text{Arc } 1'} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2\mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'},$$

also

$$31) \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2B}{\text{Arc } 1'}, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2\mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'}; \end{cases}$$

oder genauer:

$$32) \quad B - \mathfrak{B} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1'} - \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 B}{\text{Arc } 1'}$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'},$$

also

$$33) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1'} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 B}{\text{Arc } 1'}, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1'}. \end{cases}$$

Soll $B - \mathfrak{B}$ in Secunden ausgedrückt sein, so muss man eben so setzen:

$$34) \quad B - \mathfrak{B} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1''} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''},$$

also

$$35) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1''}, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''}; \end{cases}$$

oder genauer:

$$36) \quad B - \mathfrak{B} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1''} - \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 B}{\text{Arc } 1''}$$

$$= \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''},$$

also

$$37) \quad \begin{cases} \mathfrak{B} = B - \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 B}{\text{Arc } 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 B}{\text{Arc } 1''}, \\ B = \mathfrak{B} + \frac{a-b}{a+b} \cdot \frac{\sin 2 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''} + \frac{1}{2} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2 \cdot \frac{\sin 4 \mathfrak{B}}{\text{Arc } 1''}. \end{cases}$$

Hierbei hat man zu bemerken, dass

$$38) \quad \begin{cases} \text{Arc } 1' = \frac{1}{3437,7}, \quad \frac{1}{\text{Arc } 1'} = 3437,7; \\ \text{Arc } 1'' = \frac{1}{206264,8}, \quad \frac{1}{\text{Arc } 1''} = 206264,8; \end{cases}$$

so wie auch, dass

$$39) \left\{ \begin{array}{l} \log \text{Arc } 1' = 6,4637261 - 10 \\ \quad \quad \quad = 0,4637261 - 4, \\ \log \text{Arc } 1'' = 4,6855749 - 10 \\ \quad \quad \quad = 0,6855749 - 6 \end{array} \right.$$

und

$$40) \left\{ \begin{array}{l} \log \frac{1}{\text{Arc } 1'} = 3,5362739 \\ \log \frac{1}{\text{Arc } 1''} = 5,3144251 \end{array} \right.$$

ist.

§. 9.

In die in §. 7. gefundenen Ausdrücke von u , v , w und r wollen wir nun statt der wahren Breite B die reducirte Breite $\mathfrak{B}$ einführen.

Weil nach 21)

$$\text{tang } B = \frac{\text{tang } \mathfrak{B}}{\sqrt{1 - e^2}} = \text{tang } \mathfrak{B} \cdot \sqrt{1 + \varepsilon^2}$$

und nach bekannten goniometrischen Formeln

$$\sin B^2 = \frac{\text{tang } B^2}{1 + \text{tang } B^2}, \quad \cos B^2 = \frac{1}{1 + \text{tang } B^2}$$

ist, so ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\sin B^2 = \frac{\sin \mathfrak{B}^2}{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2} = \frac{(1 + \varepsilon^2) \sin \mathfrak{B}^2}{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2},$$

$$\cos B^2 = \frac{(1 - e^2) \cos \mathfrak{B}^2}{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2} = \frac{\cos \mathfrak{B}^2}{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2};$$

also

$$\sin B = \frac{\sin \mathfrak{B}}{\sqrt{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2}} = \frac{\sin \mathfrak{B} \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2}},$$

$$\cos B = \frac{\cos \mathfrak{B} \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2}} = \frac{\cos \mathfrak{B}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2}}.$$

Ferner ist

$$1 - e^2 \sin B^2 = 1 - \frac{e^2 \sin \mathfrak{B}^2}{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2} = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2},$$

$$1 + \varepsilon^2 \cos B^2 = 1 + \frac{\varepsilon^2 \cos \mathfrak{B}^2}{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2} = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2};$$

also

$$\sqrt{1 - e^2 \sin B^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2}},$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos B^2} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2}}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Formeln 17) ein, so erhält man nach leichter Rechnung

$$41) \begin{cases} u = a \cos L \cos \mathfrak{B}, \\ v = a \sin L \cos \mathfrak{B}, \\ w = b \sin \mathfrak{B}; \end{cases}$$

und weil nun

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

ist, so ist

$$42) r = \sqrt{a^2 \cos \mathfrak{B}^2 + b^2 \sin \mathfrak{B}^2}$$

oder

$$r = a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin \mathfrak{B}^2} = b \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \cos \mathfrak{B}^2},$$

d. i.

$$43) r = a \sqrt{1 - e^2 \sin \mathfrak{B}^2} = b \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos \mathfrak{B}^2}.$$

§. 10.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser des durch den Punkt $(u v w)$ gehenden Meridians in dem Punkte $(u v w)$ durch ϱ , so ist nach einer aus der Lehre von der Ellipse bekannten Formel

$$\varrho = \frac{\{b^4(u^2 + v^2) + a^4 w^2\}^{\frac{3}{2}}}{a^4 b^4}.$$

Nun ist aber nach §. 7.

$$\begin{aligned}
 & b^4 (u^2 + v^2) + a^4 w^2 \\
 &= \frac{a^2 b^4 \cos B^2}{1 - e^2 \sin B^2} + \frac{a^2 b^4 \sin B^2}{1 - e^2 \sin B^2} = \frac{a^2 b^4}{1 - e^2 \sin B^2} \\
 &= \frac{a^4 b^2 \cos B^2}{1 + \varepsilon^2 \cos B^2} + \frac{a^4 b^2 \sin B^2}{1 + \varepsilon^2 \cos B^2} = \frac{a^4 b^2}{1 + \varepsilon^2 \cos B^2},
 \end{aligned}$$

also

$$44) \quad \varrho = \frac{b^2}{a} (1 - e^2 \sin B^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{b} (1 + \varepsilon^2 \cos B^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber

$$1 - e^2 \sin B^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2} = \frac{b^2}{a^2} (1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2)^{-1},$$

$$1 + \varepsilon^2 \cos B^2 = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2} = \frac{a^2}{b^2} (1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2)^{-1};$$

also

$$(1 - e^2 \sin B^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{a^3}{b^3} (1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2)^{\frac{3}{2}},$$

$$(1 + \varepsilon^2 \cos B^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{b^3}{a^3} (1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2)^{\frac{3}{2}};$$

und folglich nach 44):

$$45) \quad \varrho = \frac{a^2}{b} (1 - e^2 \cos \mathfrak{B}^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{a^2}{b} (1 + \varepsilon^2 \sin \mathfrak{B}^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Die weitere Ausführung dieser allgemeinen Untersuchungen über das Erdellipsoid würde uns hier zu weit führen, und ist auch für das Folgende nicht unbedingt erforderlich.

Erstes Kapitel.

Grundbegriffe und Grundformeln.

§. 11.

Eine auf der Oberfläche des Erdellipsoids gezogene Linie, welche alle Meridiane so schneidet, dass die mit denselben von dieser Linie stets nach denselben Seiten hin eingeschlossenen Winkel sämmtlich einander gleich sind, heisst eine Loxodromische Linie oder eine Loxodrome.

Denken wir uns nun auf der Oberfläche des Erdellipsoids zwei beliebige Punkte, deren Längen, wahre Breiten und reducirte Breiten respective $L, L_1; B, B_1; \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ sein, und die daher in der Kürze durch (LB) und $(L_1 B_1)$, oder durch $(L\mathfrak{B})$ und $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ bezeichnet werden mögen, und verbinden diese beiden Punkte durch eine loxodromische Linie mit einander; so schliesst diese loxodromische Linie mit den zwischen den beiden gegebenen Punkten und dem positiven Pole des Erdellipsoids liegenden, eine halbe Ellipse nicht übersteigenden elliptischen Bogen der den beiden gegebenen Punkten entsprechenden Meridiane auf der Oberfläche des Erdellipsoids ein Dreieck ein, welches wir ein Loxodromisches Dreieck nennen wollen.

Vollkommener Bestimmtheit wegen werden wir im Folgenden annehmen, dass L die kleinere, L_1 die grössere Länge sei, so dass also $B, \mathfrak{B}$ die der kleineren, dagegen $B_1, \mathfrak{B}_1$ die der grösseren Länge entsprechenden wahren und reducirten Breiten sind. Ferner soll angenommen werden, dass, wenn man von dem Punkte (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ an die zwischen den beiden Punkten (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ und $(L_1 B_1)$ oder $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ liegende loxodromische Linie nach dem

Punkte $(L_1 B_1)$ oder $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ hin durchläuft, man sich nach derselben Richtung oder wenigstens nach derselben Seite hin bewegen muss, nach welcher im Aequator die Längen von 0° bis 360° gezählt werden, so dass also die Längendifferenz $L_1 - L$ der beiden gegebenen Punkte in Bezug auf den Punkt (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ und die loxodromische Linie, welche die beiden gegebenen Punkte mit einander verbindet, beide zwischen den, wie sich nach dem Obigen von selbst versteht, immer nur als halbe Ellipsen betrachteten, Meridianen der beiden gegebenen Punkte liegen.

Unter diesen Voraussetzungen sind nun die Bestimmungsstücke des zwischen dem positiven Pole des Erdellipsoids und den beiden Punkten (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ und $(L_1 B_1)$ oder $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ auf der Oberfläche desselben als Spitzen liegenden loxodromischen Dreiecks die folgenden:

1. Die Längendifferenz $L_1 - L$ der beiden Punkte (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ und $(L_1 B_1)$ oder $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ in Bezug auf den Punkt (LB) oder $(L\mathfrak{B})$, welche im Folgenden, wenn es die Kürze erfordert, durch Ω bezeichnet, und daher $\Omega = L_1 - L$ gesetzt werden soll.

2. Die der kleineren Länge L entsprechende wahre oder reducirte Breite B oder $\mathfrak{B}$.

3. Die der grösseren Länge L_1 entsprechende wahre oder reducirte Breite B_1 oder $\mathfrak{B}_1$.

4. Der von der loxodromischen Linie mit den sämtlichen Meridianen eingeschlossene Winkel, welcher nie grösser als 180° und stets so genommen werden soll, dass er von den Meridianen aus nach der Seite hin, nach welcher im Aequator die Längen von 0° bis 360° gezählt werden, von der loxodromischen Linie aus nach der Seite des positiven Pols des Erdellipsoids hin liegt. Dieser auf die angegebene Weise genommene Winkel soll im Folgenden der Curs genannt und durch Θ bezeichnet werden.

5. Die zwischen den beiden Punkten (LB) oder $(L\mathfrak{B})$ und $(L_1 B_1)$ oder $(L_1 \mathfrak{B}_1)$ liegende, stets auf die oben angegebene Weise genommene loxodromische Linie, welche im Folgenden durch s bezeichnet und die Distanz *) genannt werden soll.

Hiernach wird also ein loxodromisches Dreieck durch fünf Stücke bestimmt, und die Loxodromische Trigonometrie ist nun die Wissenschaft, welche aus drei gegebenen Bestim-

*) In der Schifffersprache wohl die gesegelte oder geloggte Distanz.

mungsstücken eines loxodromischen Dreiecks die beiden übrigen Stücke desselben zu finden lehrt.

Nachdem wir auf diese Weise die Grundbegriffe der loxodromischen Trigonometrie festgestellt haben, wollen wir jetzt sogleich zu der Entwicklung der Formeln übergehen, welche als Grundformeln dieser Wissenschaft zu betrachten sind, und aus denen die Auflösungen sämtlicher Aufgaben derselben hergeleitet werden müssen.

§. 12.

Auf der Oberfläche des Erdellipsoïds, deren Gleichung bekanntlich

$$1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, denken wir uns einen beliebigen durch die Coordinaten u, v, w bestimmten Punkt (uvw) , und legen durch denselben seinen Meridian, dessen Ebene durch die Axe der z geht und also auf der Ebene der xy senkrecht steht. Daher ist

$$Mx + Ny = 0$$

die allgemeine Form der Gleichung der Ebene dieses Meridians; weil diese Ebene aber durch den Punkt (uvw) geht, so ist auch

$$Mu + Nv = 0,$$

und wir haben daher die beiden Gleichungen

$$Mvx + Nvy = 0, \quad Mux + Nvy = 0$$

oder

$$Mux + Nuy = 0, \quad Mux + Nvx = 0;$$

aus denen sich durch Subtraction

$$M(vx - uy) = 0, \quad N(vx - uy) = 0$$

also

$$2) vx - uy = 0$$

ergiebt, welches folglich die Gleichung der Ebene des dem Punkte (uvw) entsprechenden Meridians ist. Zieht man aber von dieser Gleichung die identische Gleichung

$$vu - uv = 0$$

ab, so erhält man als Gleichung der Ebene des dem Punkte (uvw) entsprechenden Meridians auch die Gleichung

$$3) v(x - u) - u(y - v) = 0.$$

Durch den Punkt $(u v w)$ wollen wir nun an seinen Meridian eine Berührende legen. Nehmen wir die Ebene des Meridians als die Ebene eines neuen durch den Mittelpunkt des Erdellipsoids als Anfang gelegten rechtwinkligen Coordinatensystems der ξz an, und lassen den positiven Theil der Axe der ξ von dem Mittelpunkte des Erdellipsoids an nach dem Punkte $(u v)$ in der Ebene des Aequators hin gerichtet sein; so ist die Gleichung des dem Punkte $(u v w)$ entsprechenden Meridians in dem Systeme der ξz :

$$\left(\frac{\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1,$$

woraus sogleich durch Differentiation

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = - \frac{b^2 \xi}{a^2 z}$$

folgt. Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Punktes $(u v w)$ in dem Systeme der ξz durch x, z ; so ist die Gleichung der durch den Punkt $(u v w)$ an seinen Meridian gelegten Berührenden in dem Systeme der ξz nach bekannten Formeln der analytischen Geometrie

$$z - z = \frac{\partial z}{\partial x} (\xi - x),$$

also nach dem Vorhergehenden

$$z - z = - \frac{b^2 x}{a^2 z} (\xi - x),$$

oder, wie hieraus leicht folgt:

$$\frac{x \xi}{a^2} + \frac{z z}{b^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2,$$

d. i.

$$\frac{x \xi}{a^2} + \frac{z z}{b^2} = 1.$$

Weil nun aber offenbar

$$x = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad z = w$$

ist, so ist diese Gleichung

$$\frac{\xi \sqrt{u^2 + v^2}}{a^2} + \frac{w z}{b^2} = 1.$$

Ueberlegt man jetzt, dass augenscheinlich in völliger Allgemeinheit

also $u : \sqrt{u^2 + v^2} = x : \xi,$

$$\xi = \frac{x \sqrt{u^2 + v^2}}{u}$$

ist; so ergibt sich aus dem Vorhergehenden als Gleichung der durch den Punkt (uvw) gelegten Berührenden seines Meridians zwischen den veränderlichen Coordinaten x und z die Gleichung

$$4) \frac{(u^2 + v^2)x}{a^2 u} + \frac{wz}{b^2} = 1.$$

Weil die in Rede stehende Berührende in der Ebene des Meridians des Punktes (uvw) liegt, so ist nach 2) für dieselbe

$$vx - uy = 0, \text{ also } x = \frac{u}{v} y$$

und folglich nach 4)

$$5) \frac{(u^2 + v^2)y}{a^2 v} + \frac{wz}{b^2} = 1.$$

Daher hat man jetzt im Systeme der xyz für die Berührende des durch den Punkt (uvw) gelegten Meridians in diesem Punkte überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$6) \begin{cases} vx - uy = 0, \\ \frac{(u^2 + v^2)x}{a^2 u} + \frac{wz}{b^2} = 1, \\ \frac{(u^2 + v^2)y}{a^2 v} + \frac{wz}{b^2} = 1. \end{cases}$$

§. 13.

Ferner wollen wir uns durch den Punkt (uvw) eine beliebige Curve auf der Oberfläche des Erdellipsoids gezogen denken, deren Gleichungen

$$7) f(x, z) = 0, \quad f_1(y, z) = 0$$

sein mögen. Dann sind nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich

$$8) \begin{cases} x - u = \frac{\partial u}{\partial w} (z - w), \\ y - v = \frac{\partial v}{\partial w} (z - w); \end{cases}$$

wo die Differentialquotienten

$$\frac{\partial u}{\partial w} \text{ und } \frac{\partial v}{\partial w}$$

aus den Gleichungen

$$9) f(u, w) = 0, \quad f_1(v, w) = 0$$

entwickelt werden müssen, die Gleichungen der Berührenden dieser Curve in dem Punkte $(u v w)$. Bringt man nun die zweite und dritte der Gleichungen 6) auf die Form

$$x = \frac{a^2 u}{u^2 + v^2} - \frac{a^2 u w}{b^2 (u^2 + v^2)} z,$$

$$y = \frac{a^2 v}{u^2 + v^2} - \frac{a^2 v w}{b^2 (u^2 + v^2)} z;$$

so ergibt sich, in Verbindung mit den Gleichungen 8), aus den Principien der analytischen Geometrie auf der Stelle die Gleichung

$$\cos \Theta^2 = \frac{\left\{ 1 - \frac{a^2 u w}{b^2 (u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} - \frac{a^2 v w}{b^2 (u^2 + v^2)} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{a^4 u^2 w^2}{b^4 (u^2 + v^2)^2} + \frac{a^4 v^2 w^2}{b^4 (u^2 + v^2)^2} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2 \right\}},$$

d. i.

$$10) \cos \Theta^2 = \frac{\left\{ 1 - \frac{a^2 w}{b^2 (u^2 + v^2)} \left(u \frac{\partial u}{\partial w} + v \frac{\partial v}{\partial w} \right) \right\}^2}{\left\{ 1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2 + v^2} \right\} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2 \right\}}.$$

Weil aber der Punkt $(u v w)$ auf der Oberfläche des Erdellipsoids liegt, so haben wir zwischen dessen Coordinaten u, v, w nach 1) die Gleichung

$$11) \frac{u^2 + v^2}{a^2} + \frac{w^2}{b^2} = 1,$$

aus der durch Differentiation in Bezug auf w als unabhängige Variable

$$\frac{u \frac{\partial u}{\partial w} + v \frac{\partial v}{\partial w}}{a^2} + \frac{w}{b^2} = 0,$$

also

$$12) u \frac{\partial u}{\partial w} + v \frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{a^2}{b^2} w,$$

und hieraus ferner

$$1 - \frac{a^2 w}{b^2 (u^2 + v^2)} \left(u \frac{\partial u}{\partial w} + v \frac{\partial v}{\partial w} \right) = 1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2 + v^2}$$

folgt, so dass also nach 10)

$$13) \cos \Theta^2 = \frac{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2 + v^2}}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2}$$

ist.

Nach 12) ist

$$\frac{\partial u}{\partial w} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{w}{u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial v}{\partial w}, \quad \frac{\partial v}{\partial w} = -\frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{w}{v} - \frac{u}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial w};$$

also

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{v^2} + 2 \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{u^2 + v^2}{v^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2} + 2 \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{u^2 + v^2}{u^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2, \end{aligned}$$

und folglich, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2 - \left(1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2 + v^2} \right) \\ &= \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{u^2 w^2}{v^2 (u^2 + v^2)} + 2 \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} + \frac{u^2 + v^2}{v^2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 \\ &= \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{v^2 w^2}{u^2 (u^2 + v^2)} + 2 \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} + \frac{u^2 + v^2}{u^2} \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2, \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2 - \left(1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2 + v^2} \right) \\ &= \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v \sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u \sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{u} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \right\}^2. \end{aligned}$$

Also ist nach 13):

$$14) \sin \Theta^2 = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \right\}^2}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2} \\ = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \right\}^2}{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial w} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial w} \right)^2}.$$

Nach 13) und 14) ist

$$15) \cot \Theta^2 = \frac{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2+v^2}}{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \right\}^2} \\ = \frac{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2+v^2}}{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \right\}^2},$$

oder

$$16) \tan \Theta^2 = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{uw}{v \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{v} \cdot \frac{\partial u}{\partial w} \right\}^2}{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2+v^2}} \\ = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{vw}{u \sqrt{u^2+v^2}} + \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u} \cdot \frac{\partial v}{\partial w} \right\}^2}{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{w^2}{u^2+v^2}}.$$

Soll nun die Curve, welche wir uns auf der Oberfläche des Erdellipsoids durch den Punkt (uvw) gezogen gedacht haben, eine Loxodrome sein, so muss für alle Punkte derselben der Winkel Θ constant sein, und wir können also in diesem Falle in den Gleichungen 13), 14), 15), 16), in denselben den Winkel Θ als constant betrachtend, für u, v, w respective die veränderlichen Coordinaten x, y, z setzen. Verbinden wir dann mit den nach einander auf diese Weise veränderten Gleichungen 13), 14), 15), 16) die Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

welches nicht bloss verstattet, sondern, weil die Loxodrome ganz auf der Oberfläche des Erdellipsoids liegen soll, nothwendig erforderlich ist, so erhalten wir zwei Gleichungen zwischen x , y , z , welche die Gleichungen der Loxodrome zwischen rechtwinkligen Coordinaten sind. Die eine dieser beiden Gleichungen ist freilich eine Differentialgleichung, und muss daher mit Hülfe der andern Gleichung integrirt werden, um die völlig entwickelten Gleichungen der Loxodrome zwischen rechtwinkligen Coordinaten zu erhalten; die willkürliche Constante aber, welche durch die Integration nothwendig eingeführt wird, wird man etwa dadurch zu bestimmen haben, dass man die Loxodrome durch einen gegebenen Punkt auf der Oberfläche des Erdellipsoids gehen lässt. Wir beabsichtigen nicht, diese Rechnungen jetzt weiter zu verfolgen, sondern wollen nun in die obigen Gleichungen statt der rechtwinkligen Coordinaten Winkelcoordinaten einführen, wodurch alle ferneren Rechnungen, namentlich aber die nothwendig auszuführende Integration, wesentlich erleichtert werden.

§. 14.

Als allgemeine Gleichungen der Loxodrome zwischen rechtwinkligen Coordinaten legen wir unsern folgenden Betrachtungen die beiden aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Gleichungen

$$17) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \\ \tan^2 \Theta = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \right\}^2}{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2}}; \end{array} \right.$$

oder, was im Wesentlichen ganz Dasselbe ist, die beiden Gleichungen

$$18) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \\ \tan^2 \Theta = \frac{\left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \right\}^2}{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \end{array} \right.$$

zum Grunde, wo bekanntlich Θ eine constante Grösse ist.

Bezeichnen wir nun die Länge und wahre Breite des Punktes (xyz) im Allgemeinen respective durch ω und $\bar{\omega}$, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$19) \begin{cases} x = \cos \omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y = \sin \omega \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

und, wie sich unmittelbar aus §. 7. ergibt:

$$20) z = \frac{b^2}{a^2} \tan \bar{\omega} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Also ist

$$21) \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} = \sec \omega, \quad \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \operatorname{cosec} \omega$$

und

$$\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b^2}{a^2} \tan \bar{\omega}.$$

Ferner ist

$$\frac{x}{y} = \cot \omega, \quad \frac{y}{x} = \tan \omega;$$

also

$$22) \frac{xz}{y\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b^2}{a^2} \cot \omega \tan \bar{\omega}, \quad \frac{yz}{x\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b^2}{a^2} \tan \omega \tan \bar{\omega}.$$

Nach 20) ist

$$x^2 + y^2 = \frac{a^4}{b^4} z^2 \cot^2 \bar{\omega},$$

und weil nun nach 17) oder 18)

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

ist, so ist

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2} \cot^2 \bar{\omega}\right) \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

also

$$z^2 = \frac{b^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cot^2 \bar{\omega}} = \frac{b^4}{b^2 + a^2 \cot^2 \bar{\omega}}$$

oder

$$z^2 = \frac{b^4 \sin^2 \bar{\omega}}{a^2 \cos^2 \bar{\omega} + b^2 \sin^2 \bar{\omega}},$$

woraus sich in völliger Allgemeinheit

$$z = \frac{b^2 \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}},$$

und folglich, weil nach 20)

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a^2}{b^2} z \cot \bar{\omega}$$

ist,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a^2 \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}$$

ergiebt. Daher ist nach 19)

$$x = \frac{a^2 \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}},$$

$$y = \frac{a^2 \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}};$$

und wir haben folglich für x , y , z die nachstehenden, übrigens auch schon aus §. 7. sich leicht ergebenden Ausdrücke:

$$23) \begin{cases} x = \frac{a^2 \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}, \\ y = \frac{a^2 \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}, \\ z = \frac{b^2 \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}. \end{cases}$$

Differentiiren wir jetzt die Grössen x , y , z in Bezug auf ω als unabhängige veränderliche Grösse, so erhalten wir mittelst einiger keiner Schwierigkeit unterliegenden Reductionen:

$$24) \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \omega} = -a^2 \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) + b^2 \cos \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{(a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}, \\ \frac{\partial y}{\partial \omega} = a^2 \frac{\cos \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) - b^2 \sin \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{(a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}, \\ \frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{a^2 b^2 \cos \bar{\omega}}{(a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}} \cdot \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}; \end{cases}$$

und weil nun nach den Principien der Differentialrechnung

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial \omega} : \frac{\partial z}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial \omega} : \frac{\partial z}{\partial \omega}$$

ist, so ist nach den vorhergehenden Formeln, wie man sogleich findet:

$$25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial z} &= - \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) + b^2 \cos \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}, \\ \frac{\partial y}{\partial z} &= \frac{\cos \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) - b^2 \sin \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}. \end{aligned} \right.$$

Nach 22), 21), 25) ist nun

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{xz}{y \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \\ &= \cot \omega \tan \bar{\omega} \\ & - \operatorname{cosec} \omega \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) + b^2 \cos \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}, \end{aligned}$$

d. i., wie man nach einigen leichten Reductionen findet:

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{xz}{y \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \\ &= - \frac{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}{b^2 \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}. \end{aligned}$$

Ferner ist nach dem Obigen

$$1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = 1 + \tan^2 \bar{\omega} = \sec^2 \bar{\omega} = \frac{1}{\cos^2 \bar{\omega}},$$

und folglich nach 17)

$$\tan \Theta^2 = \frac{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2}{b^4 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega} \right)^2},$$

oder

$$\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2 = \frac{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2}{b^4 \tan \Theta^2},$$

also

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\omega}}\right)^2 = \frac{b^4 \tan \Theta^2}{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2}.$$

Nun erhellet aber auf der Stelle, dass $\partial \omega$ und $\partial \bar{\omega}$ jederzeit gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben, d. h. dass $\frac{\partial \omega}{\partial \bar{\omega}}$ positiv oder negativ ist, jenachdem der 180° nicht übersteigende Winkel Θ spitz oder stumpf ist, d. h. jenachdem $\tan \Theta$ positiv oder negativ ist, so dass also

$$\tan \Theta \text{ und } \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\omega}}$$

immer gleiche Vorzeichen haben. Weil nun offenbar

$$\cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)$$

stets eine positive Grösse ist, so ergibt sich aus dem Vorhergehenden sogleich die in völliger Allgemeinheit gültige Gleichung

$$26) \quad \frac{\partial \omega}{\partial \bar{\omega}} = \frac{b^2 \tan \Theta}{\cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

oder

$$27) \quad \partial \omega = \frac{b^2 \tan \Theta \partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)}.$$

Da nun aber

$$\partial \sin \bar{\omega} = \cos \bar{\omega} \partial \bar{\omega}, \quad \partial \bar{\omega} = \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega}}$$

ist, so ist auch

$$28) \quad \partial \omega = \frac{b^2 \tan \Theta \partial \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

oder

$$\partial \omega = \frac{\frac{b^2}{a^2} \tan \Theta \partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2) \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin \bar{\omega}^2\right)},$$

d. i.

$$29) \quad \partial \omega = \frac{(1 - e^2) \tan \Theta \partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2) (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

welches nun ein rationales algebraisches Differential ist, das sich ohne alle Schwierigkeit nach bekannten Regeln integrieren lässt.

Nach bekannten Sätzen von den bestimmten Integralen ergibt sich aber aus der vorhergehenden Gleichung unmittelbar die Gleichung

$$30) L_1 - L = (1 - e^2) \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

oder, wenn man in Folge von §. 11.

$$\Omega = L_1 - L$$

setzt:

$$31) \Omega = (1 - e^2) \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}.$$

Diese, wenn auch für jetzt noch nicht vollständig entwickelte Formel ist als die erste Grundformel der loxodromischen Trigonometrie zu betrachten. Bevor wir uns mit der, übrigens durchaus keiner Schwierigkeit unterliegenden, weiteren Entwicklung dieser Formel beschäftigen, wollen wir uns zuerst zu der Entwicklung der zweiten Grundformel unserer Wissenschaft wenden, für welche in dem Vorhergehenden schon die nöthigen Vorbereitungen enthalten sind.

§. 15.

Weil nach 25)

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) + b^2 \cos \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\cos \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) - b^2 \sin \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}$$

ist, so ist, wie man sogleich übersieht:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2 + b^4 \sin \bar{\omega}^2 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2}{b^4 \cos \bar{\omega}^2 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2},$$

also

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{\cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2 + b^4 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2}{b^4 \cos \bar{\omega}^2 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2}.$$

Weil aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$b^4 \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}\right)^2 = \cot \Theta^2 \cos \bar{\omega}^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^2$$

ist, so ist offenbar

$$1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 = \frac{\operatorname{cosec} \Theta^2}{\cot \Theta^2 \cos \bar{\omega}^2} = \frac{1}{\cos \Theta^2 \cos \bar{\omega}^2},$$

was übrigens auch unmittelbar aus der in §. 13. bewiesenen Gleichung

$$\cos \Theta^2 = \frac{1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2}}{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} \quad *)$$

geschlossen wird, da nach §. 14. bekanntlich

$$1 + \frac{a^4}{b^4} \cdot \frac{z^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\cos \bar{\omega}^2}$$

ist. Weil nun nach den Principien der analytischen Geometrie

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 = \partial z^2 \left\{ 1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 \right\}$$

ist, so ist

*) Es sind nur x, y, z für die dortigen u, v, w gesetzt.

$$\partial s^2 = \frac{\partial z^2}{\cos \Theta^2 \cos \bar{\omega}^2},$$

und folglich nach 24)

$$\partial s^2 = \frac{a^4 b^4 \partial \bar{\omega}^2}{\cos \Theta^2 (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^3}.$$

Nun erhellet aber leicht, dass unter den gemachten Voraussetzungen $\cos \Theta$ und $\partial \bar{\omega}$ stets gleiche Vorzeichen haben und ∂s immer positiv ist. Also ist offenbar

$$32) \partial s = \frac{a^2 b^2 \partial \bar{\omega}}{\cos \Theta (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a^2 b^2 \partial \bar{\omega}}{\cos \Theta (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}}.$$

Auch ist, wie sogleich erhellet:

$$\partial s = \frac{b^2 \partial \bar{\omega}}{a \cos \Theta \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin \bar{\omega}^2 \right)^{\frac{3}{2}}},$$

d. i.

$$33) \partial s = \frac{a (1 - e^2) \partial \bar{\omega}}{\cos \Theta (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a (1 - e^2) \partial \bar{\omega}}{\cos \Theta (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2}}.$$

Nun ist aber

$$\partial \sin \bar{\omega} = \cos \bar{\omega} \partial \bar{\omega}, \quad \partial \bar{\omega} = \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega}};$$

also

$$34) \partial s = \frac{a (1 - e^2) \partial \sin \bar{\omega}}{\cos \Theta \cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a (1 - e^2) \partial \sin \bar{\omega}}{\cos \Theta \cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2) \sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2}}$$

$$= \frac{a (1 - e^2) \partial \sin \bar{\omega}}{\cos \Theta (1 - \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{1}{2}} (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{a(1-e^2) \partial \sin \bar{\omega}}{\cos \Theta (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2) \mathcal{V}(1-\sin \bar{\omega}^2) (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

und nach der Theorie der bestimmten Integrale erhält man also sogleich die folgende Gleichung:

$$35) \quad s = \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1-e^2 \sin \bar{\omega}^2) \mathcal{V}(1-\sin \bar{\omega}^2) (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

welche als die zweite Grundformel der loxodromischen Trigonometrie zu betrachten ist.

Die beiden Formeln oder Gleichungen 31) und 35), nämlich die beiden Gleichungen:

$$36) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (1-e^2) \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1-\sin \bar{\omega}^2) (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)}, \\ s &= \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1-e^2 \sin \bar{\omega}^2) \mathcal{V}(1-\sin \bar{\omega}^2) (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)} \end{aligned} \right.$$

sind aber offenbar hinreichend, um alle Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie auflösen zu können, weil, wenn zwischen fünf Grössen, hier zwischen den Grössen Ω , B , B_1 , Θ , s , zwei Gleichungen gegeben sind, aus drei gegebenen oder bekannten dieser fünf Grössen immer die beiden anderen mit Hülfe der beiden gegebenen Gleichungen gefunden werden können, so dass also die beiden Gleichungen 36) die vollständigen Grundformeln der loxodromischen Trigonometrie sind.

Uebrigens kann man nach 27) und 33) die beiden vorhergehenden Grundformeln auch auf folgende Art ausdrücken:

$$36^a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Omega &= (1-e^2) \operatorname{tang} \Theta \int_B^{B_1} \frac{\partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)}, \\ s &= \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \int_B^{B_1} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned} \right.$$

wovon man sich sogleich mittelst leichter Rechnung überzeugen wird *).

*) Man pflegt sonst in der Lehre von der Loxodrome auf dem Ellipsoid die vorhergehenden Formeln 36^a), namentlich die erste derselben, auf eine andere

§. 16.

Durch Einführung der reducirten Breiten kann man aber die vorhergehenden Grundformeln noch auf einen anderen Ausdruck bringen, den wir jetzt entwickeln wollen.

Bezeichnen wir nämlich die Länge und reducirte Breite des Punktes (xyz) im Allgemeinen respective durch ω und τ , so ist bekanntlich

$$b \operatorname{tang} \bar{\omega} = a \operatorname{tang} \tau,$$

also durch Differentiation

$$\frac{b \partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega}^2} = \frac{a \partial \tau}{\cos \tau^2}, \quad \partial \bar{\omega} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\cos \bar{\omega}^2}{\cos \tau^2} \partial \tau.$$

Nun ist aber

$$\cos \bar{\omega}^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} \bar{\omega}^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \tau^2} = \frac{b^2 \cos \tau^2}{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2},$$

also

$$\cos \bar{\omega} = \frac{b \cos \tau}{\sqrt{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2}}$$

und

$$\partial \bar{\omega} = \frac{a b}{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2} \partial \tau.$$

Ferner ist auch

$$\sin \bar{\omega}^2 = \frac{\operatorname{tang} \bar{\omega}^2}{1 + \operatorname{tang} \bar{\omega}^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \tau^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} \tau^2} = \frac{a^2 \sin \tau^2}{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2},$$

also

$$\sin \bar{\omega} = \frac{a \sin \tau}{\sqrt{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2}}.$$

Weise durch eine an eine Figur geknüpfte mehr geometrische Betrachtung abzuleiten. Ich habe hier die obige analytische, zugleich zu mehreren anderen bemerkenswerthen Resultaten führende analytische Ableitung vorgezogen, und will die andere mehr elementare Ableitung nicht mittheilen, weil ich dieselbe wohl als hinreichend bekannt voraussetzen kann, verweise aber wegen derselben z. B. auf das Klügel'sche mathematische Wörterbuch. Art. Sphäroid. Thl. IV. S. 406. Auch s. m. die Abhandlung: De cursu navis in sphaeroide elliptico. Auctore F. T. Schubert (Nova Acta Acad. scientiar. imp. Petropolitanae. T. VIII. p. 140.).

Endlich ist auch, wie man aus den vorhergehenden Formeln sogleich findet:

$$a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2},$$

oder

$$\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2} = \frac{a b}{\sqrt{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2}}.$$

Daher ist nach 27) und 32), wie man leicht findet:

$$37) \begin{cases} \partial \omega = \frac{\text{tang } \Theta \sqrt{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2}}{a \cos \tau} \partial \tau, \\ \partial s = \frac{\sqrt{a^2 \sin \tau^2 + b^2 \cos \tau^2}}{\cos \Theta} \partial \tau. \end{cases}$$

Auch ist

$$\partial \omega = \frac{\text{tang } \Theta \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos \tau^2}}{\cos \tau} \partial \tau,$$

$$\partial s = \frac{a \sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos \tau^2}}{\cos \Theta} \partial \tau$$

oder

$$\partial \omega = \frac{b \text{ tang } \Theta \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin \tau^2}}{a \cos \tau} \partial \tau,$$

$$\partial s = \frac{b \sqrt{1 + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sin \tau^2}}{\cos \Theta} \partial \tau;$$

d. i.

$$38) \begin{cases} \partial \omega = \frac{\text{tang } \Theta \sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ \partial s = \frac{a \sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{\cos \Theta} \partial \tau; \end{cases}$$

oder

$$39) \begin{cases} \partial \omega = \frac{b \operatorname{tang} \Theta \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{a \cos \tau} \partial \tau, \\ \partial s = \frac{b \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \Theta} \partial \tau; \end{cases}$$

oder auch

$$40) \begin{cases} \partial \omega = \operatorname{tang} \Theta \sqrt{1 - e^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ \partial s = \frac{b}{\cos \Theta} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau} \cdot \partial \tau; \end{cases}$$

oder endlich auch

$$41) \begin{cases} \partial \omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \tau} \cdot \partial \tau, \\ \partial s = \frac{b}{\cos \Theta} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau} \cdot \partial \tau. \end{cases}$$

Nach der Lehre von den bestimmten Integralen ergeben sich aber hieraus unmittelbar die folgenden Formeln:

$$42) \begin{cases} \Omega = \operatorname{tang} \Theta \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ s = \frac{a}{\cos \Theta} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau} \cdot \partial \tau; \end{cases}$$

oder

$$43) \begin{cases} \Omega = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \Theta \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau} \cdot \partial \tau; \end{cases}$$

oder auch

$$44) \begin{cases} \Omega = \operatorname{tang} \Theta \sqrt{1 - e^2} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \tau} \cdot \partial \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau} \cdot \partial \tau; \end{cases}$$

oder endlich auch

$$45) \begin{cases} \Omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\cos \tau} \cdot \partial \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau} \cdot \partial \tau. \end{cases}$$

Weil aber

$$\partial \sin \tau = \cos \tau \partial \tau, \quad \partial \tau = \frac{\partial \sin \tau}{\cos \tau}$$

ist, so kann man offenbar auch setzen:

$$46) \begin{cases} \Omega = \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 \tau}}{1 - \sin^2 \tau} \partial \sin \tau, \\ s = \frac{a}{\cos \Theta} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 - e^2 + e^2 \sin^2 \tau}}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} \partial \sin \tau; \end{cases}$$

oder

$$47) \begin{cases} \Omega = \frac{b}{a} \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{1 - \sin^2 \tau} \partial \sin \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} \partial \sin \tau; \end{cases}$$

oder auch

$$48) \begin{cases} \Omega = \operatorname{tang} \Theta \sqrt{1 - e^2} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{1 - \sin^2 \tau} \partial \sin \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} \partial \sin \tau; \end{cases}$$

oder endlich auch

$$49) \begin{cases} \Omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{1 - \sin^2 \tau} \partial \sin \tau, \\ s = \frac{b}{\cos \Theta} \int_{\sin \mathfrak{B}}^{\sin \mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \tau}}{\sqrt{1 - \sin^2 \tau}} \partial \sin \tau. \end{cases}$$

§. 17.

Um nun zuerst die Grundformel

$$\Omega = (1 - e^2) \operatorname{tang} \Theta \int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

weiter zu entwickeln, setzen wir auf bekannte Weise

$$\frac{1}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)} = \frac{M}{1 - \sin \bar{\omega}^2} + \frac{N}{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2},$$

d. i.

$$\frac{1}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)} = \frac{M + N - (e^2 M + N) \sin \bar{\omega}^2}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

und erhalten hieraus zur Bestimmung von M und N die Gleichungen

$$M + N = 1, \quad e^2 M + N = 0;$$

aus denen sich

$$M = \frac{1}{1 - e^2}, \quad N = -\frac{e^2}{1 - e^2}$$

ergiebt. Also ist

$$\frac{1}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)} = \frac{1}{1 - e^2} \left\{ \frac{1}{1 - \sin \bar{\omega}^2} - \frac{e^2}{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2} \right\}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{1 - \sin \bar{\omega}^2} = \frac{1}{2(1 - \sin \bar{\omega})} + \frac{1}{2(1 + \sin \bar{\omega})},$$

$$\frac{1}{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2} = \frac{1}{2(1 - e \sin \bar{\omega})} + \frac{1}{2(1 + e \sin \bar{\omega})};$$

also

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)} \\ &= \frac{1}{2(1 - e^2)} \left\{ \frac{1}{1 - \sin \bar{\omega}} + \frac{1}{1 + \sin \bar{\omega}} - \frac{e^2}{1 - e \sin \bar{\omega}} - \frac{e^2}{1 + e \sin \bar{\omega}} \right\}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1-e^2)} \left\{ \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}} + \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 + \sin \bar{\omega}} - e^2 \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}} - e^2 \int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{1 + e \sin \bar{\omega}} \right\},$$

d. i. nach einer allgemein bekannten Grundformel der Integralrechnung:

$$\int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1-e^2)} \left\{ l(1 + \sin \bar{\omega}) - l(1 - \sin \bar{\omega}) - el(1 + e \sin \bar{\omega}) + el(1 - e \sin \bar{\omega}) \right\}$$

oder

$$\int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

$$= \frac{1}{2(1-e^2)} \left\{ l \frac{1 + \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}} - el \frac{1 + e \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}} \right\},$$

oder, weil

$$\frac{1 + \sin \bar{\omega}}{1 - \sin \bar{\omega}} = \frac{1 + \cos(90^\circ - \bar{\omega})}{1 - \cos(90^\circ - \bar{\omega})}$$

$$= \left\{ \frac{\cos(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})}{\sin(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})} \right\}^2 = \left\{ \frac{\sin(45^\circ + \frac{1}{2}\bar{\omega})}{\cos(45^\circ + \frac{1}{2}\bar{\omega})} \right\}^2$$

$$= \cot(45^\circ - \frac{1}{2}\bar{\omega})^2 = \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\bar{\omega})^2$$

ist:

$$\int \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

$$= \frac{1}{1-e^2} \left\{ l \tan(45^\circ + \frac{1}{2}\bar{\omega}) - \frac{1}{2} el \frac{1 + e \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}} \right\}.$$

Also ist

$$\int_{\sin B}^{\sin B_1} \frac{\partial \sin \bar{\omega}}{(1 - \sin \bar{\omega}^2)(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)}$$

$$= \frac{1}{1-e^2} \left\{ l \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B_1) - \frac{1}{2} el \frac{1 + e \sin B_1}{1 - e \sin B_1} \right. \\ \left. - l \tan(45^\circ + \frac{1}{2}B) + \frac{1}{2} el \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right\},$$

und folglich nach dem Obigen

$$50) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \begin{array}{l} l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) - \frac{1}{2} e l \frac{1 + e \sin B_1}{1 - e \sin B_1} \\ - l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B) + \frac{1}{2} e l \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \end{array} \right\},$$

oder

$$51) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \begin{array}{l} l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e \left(l \frac{1 + e \sin B_1}{1 - e \sin B_1} - l \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} \right) \end{array} \right\},$$

oder

$$52) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \begin{array}{l} l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e l \frac{(1 - e \sin B)(1 + e \sin B_1)}{(1 + e \sin B)(1 - e \sin B_1)} \end{array} \right\},$$

oder

$$53) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \begin{array}{l} l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e l \frac{1 - e(\sin B - \sin B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + e(\sin B - \sin B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \end{array} \right\},$$

oder auch

$$54) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \begin{array}{l} l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \end{array} \right\}.$$

Setzt man der Kürze wegen überhaupt

$$55) F(\bar{\omega}) = l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega}) - \frac{1}{2} e l \frac{1 + e \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}},$$

so ist nach 50)

$$56) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \{ F(B_1) - F(B) \}.$$

Weil ferner bekanntlich

$$l \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B} = 2(e \sin B + \frac{1}{3} e^3 \sin B^3 + \frac{1}{5} e^5 \sin B^5 + \dots),$$

$$\frac{1 + e \sin B_1}{1 - e \sin B_1} = 2 (e \sin B_1 + \frac{1}{3} e^3 \sin B_1^3 + \frac{1}{5} e^5 \sin B_1^5 + \dots)$$

ist, so ist nach 51)

$$57) \Omega = \text{tang } \Theta \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \right. \\ \left. + \dots \right\}$$

Erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind, ist hiernach

$$58) \Omega =$$

$$\text{tang } \Theta \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\}.$$

Soll Ω in Minuten oder Secunden ausgedrückt sein, so ist

$$59) \Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ F(B_1) - F(B) \right\}$$

oder

$$60) \Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1''} \left\{ F(B_1) - F(B) \right\},$$

so wie

$$61) \Omega =$$

$$\frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\}$$

oder

$$62) \Omega =$$

$$\frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1''} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\},$$

und eben so bei den übrigen vorhergehenden Formeln.

§. 18.

Betrachten wir ferner die Formel

$$s = \frac{a(1 - e^2)}{\cos \Theta} \int_B^{B_1} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})^{\frac{3}{2}}},$$

welche zur Darstellung von s durch eine convergirende unendliche Reihe am Meisten geeignet ist, so ist nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}} \\ = (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin \bar{\omega}^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \sin \bar{\omega}^4 + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin \bar{\omega}^6 + \dots) \partial \bar{\omega},$$

woraus sich, wenn man integrirt, auf der Stelle die folgende Gleichung ergibt:

$$63) \quad s = \frac{a(1 - e^2)}{\cos \Theta} \left\{ B_1 - B + \frac{3}{2} e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\},$$

oder, wenn $B_1 - B$ in Minuten oder Secunden ausgedrückt ist, respective

$$64) \quad s = \frac{a(1 - e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{2} e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}$$

oder

$$65) \quad s = \frac{a(1 - e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (B_1 - B) \text{Arc } 1'' + \frac{3}{2} e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}$$

Nach einer sehr bekannten Reductionsformel der Integralrechnung ist allgemein

$$\int \sin \bar{\omega}^{2n} \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin \bar{\omega}^{2n-1} \cos \bar{\omega}}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \sin \bar{\omega}^{2n-2} \partial \bar{\omega},$$

also

$$\begin{aligned} 66) \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^{2n} \partial \bar{\omega} \\ = - \frac{\sin B_1^{2n-1} \cos B_1 - \sin B^{2n-1} \cos B}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^{2n-2} \partial \bar{\omega}, \end{aligned}$$

mittelst welcher Formel sich also die in den obigen Ausdrücken von s vorkommenden Integrale nach und nach berechnen lassen.

Für $n = 1$ ist

$$\begin{aligned} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} \\ = \frac{\sin B \cos B - \sin B_1 \cos B_1}{2} + \frac{1}{2} \int_B^{B_1} \partial \bar{\omega}, \end{aligned}$$

d. i.

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = \frac{1}{2} (B_1 - B) + \frac{1}{4} (\sin 2B - \sin 2B_1)$$

oder

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = \frac{1}{2} (B_1 - B) + \frac{1}{2} \sin (B - B_1) \cos (B + B_1).$$

Folglich ist erst mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf e von der vierten Ordnung sind, nach dem Obigen:

$$67) s =$$

$$\frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2) (B_1 - B) + \frac{3}{4}e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\}.$$

Ist $B_1 - B$ in Minuten ausgedrückt, so ist

$$68) s =$$

$$\frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2) (B_1 - B) \text{ Arc } 1' + \frac{3}{4}e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\},$$

und eben so ist, wenn $B_1 - B$ in Secunden ausgedrückt ist,

$$69) s = \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2)(B_1 - B) \text{Arc} 1'' + \frac{3}{4}e^2 \sin(B - B_1) \cos(B + B_1) \right\}.$$

Setzt man überhaupt

$$70) G(\bar{\omega}) = a(1-e^2) \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1-e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}},$$

so ist

$$71) s = \frac{G(B_1) - G(B)}{\cos \Theta}.$$

§. 19.

Von den verschiedenen, die reducirten Breiten enthaltenden Grundformeln wollen wir bloss die Formeln 42), nämlich die Formeln

$$72) \begin{cases} \Omega = \text{tang } \Theta \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1-e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ s = \frac{a}{\cos \Theta} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1-e^2 \cos \tau^2} \cdot \partial \tau \end{cases}$$

einer näheren Betrachtung unterwerfen.

Setzen wir zu dem Ende überhaupt

$$73) \begin{cases} \mathfrak{S}(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sqrt{1-e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} \partial \tau, \\ \mathfrak{G}(\tau) = a \int_0^\tau \sqrt{1-e^2 \cos \tau^2} \cdot \partial \tau; \end{cases}$$

so ist nach 72)

$$74) \begin{cases} \Omega = \text{tang } \Theta \{ \mathfrak{S}(\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{S}(\mathfrak{B}) \}, \\ s = \frac{\mathfrak{G}(\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{G}(\mathfrak{B})}{\cos \Theta}; \end{cases}$$

oder

$$75) \begin{cases} \Omega = \text{tang } \Theta \{ \mathfrak{S}(\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{S}(\mathfrak{B}) \}, \\ s = \sec \Theta \{ \mathfrak{G}(\mathfrak{B}_1) - \mathfrak{G}(\mathfrak{B}) \}; \end{cases}$$

und man sieht also, dass es bloss auf die Entwicklung der beiden Integrale 73) ankommt, mit der wir uns daher jetzt beschäftigen wollen.

§. 20.

Was zuerst das Integral

$$\S(\tau) = \int_0^\tau \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} d\tau$$

betrifft, so setze man, um dasselbe zu entwickeln,

$$t = \frac{\sin \tau}{\sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}};$$

dann ist, wie man durch Differentiation leicht findet:

$$\partial t = \frac{(1 - e^2) \cos \tau d\tau}{(1 - e^2 \cos \tau^2) \sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}},$$

also

$$d\tau = \frac{(1 - e^2 \cos \tau^2) \sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{(1 - e^2) \cos \tau} dt,$$

und folglich

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} d\tau = \frac{(1 - e^2 \cos \tau^2)^2}{(1 - e^2) \cos \tau^2} dt.$$

Aus der Gleichung

$$t = \frac{\sin \tau}{\sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}$$

folgt

$$(1 - e^2 \cos \tau^2) t^2 = \sin^2 \tau,$$

also

$$\cos \tau^2 = \frac{1 - t^2}{1 - e^2 t^2}, \quad 1 - e^2 \cos \tau^2 = \frac{1 - e^2}{1 - e^2 t^2};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$\frac{\sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2}}{\cos \tau} d\tau = \frac{(1 - e^2) dt}{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)},$$

also

$$\int \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \tau} d\tau = (1 - e^2) \int \frac{\partial t}{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)}.$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)} = \frac{1}{1 - e^2} \left\{ \frac{1}{1 - t^2} - \frac{e^2}{1 - e^2 t^2} \right\},$$

und

$$\frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right\},$$

$$\frac{1}{1 - e^2 t^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - et} + \frac{1}{1 + et} \right\};$$

also

$$\begin{aligned} & \frac{\partial t}{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{2(1 - e^2)} \left\{ \frac{\partial t}{1 - t} + \frac{\partial t}{1 + t} - \frac{e^2 \partial t}{1 - et} - \frac{e^2 \partial t}{1 + et} \right\}, \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial t}{(1 - t^2)(1 - e^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{2(1 - e^2)} \left\{ \int \frac{\partial t}{1 - t} + \int \frac{\partial t}{1 + t} - e^2 \int \frac{\partial t}{1 - et} - e^2 \int \frac{\partial t}{1 + et} \right\}. \end{aligned}$$

Weil $e^2 < 1$ ist, so ist auch

$$e^2 \cos^2 \tau < \cos^2 \tau,$$

also

$$1 - e^2 \cos^2 \tau > 1 - \cos^2 \tau,$$

d. i.

$$1 - e^2 \cos^2 \tau > \sin^2 \tau,$$

und folglich

$$\frac{\sin^2 \tau}{1 - e^2 \cos^2 \tau} < 1,$$

woraus sich ergibt, dass der absolute Werth von t , und folglich um so mehr auch der absolute Werth von et , kleiner als die Einheit ist, dass also $1 - t$, $1 + t$, $1 - et$, $1 + et$ sämmtlich nicht verschwindende positive Grössen sind. Folglich ist nach einer allgemein bekannten Fundamentalformel der Integralrechnung

$$\int \frac{\partial t}{1-t} = -l(1-t), \int \frac{\partial t}{1+t} = l(1+t)$$

und

$$\int \frac{\partial t}{1-et} = -\frac{1}{e} l(1-et), \int \frac{\partial t}{1+et} = \frac{1}{e} l(1+et);$$

also nach dem Obigen

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial t}{(1-t^2)(1-e^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{2(1-e^2)} \left\{ l(1+t) - l(1-t) - el(1+et) + el(1-et) \right\} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial t}{(1-t^2)(1-e^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{2(1-e^2)} \left\{ l \frac{1+t}{1-t} - el \frac{1+et}{1-et} \right\}. \end{aligned}$$

Folglich ist nach dem Obigen, wie man hieraus ohne Schwierigkeit findet:

$$\begin{aligned} 76) \quad \mathfrak{S}(\tau) &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ l \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau} + \sin \tau}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau} - \sin \tau} - el \frac{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau} + e \sin \tau}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau} - e \sin \tau} \right\}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$77) \quad \cos \varphi = \frac{\sin \tau}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau}}, \quad \cos \psi = \frac{e \sin \tau}{\sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau}};$$

so wird

$$78) \quad \mathfrak{S}(\tau) = l \cot^{1/2} \varphi - el \cot^{1/2} \psi,$$

oder auch

$$79) \quad \mathfrak{S}(\tau) = l \frac{\cot^{1/2} \varphi}{(\cot^{1/2} \psi)^e}.$$

Wir wollen nun das Integral $\mathfrak{S}(\tau)$ auch durch eine unendliche Reihe darstellen. Weil nämlich nach dem Binomischen Lehrsatz

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-e^2 \cos^2 \tau} \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \tau - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \cos^4 \tau - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \cos^6 \tau - \dots \end{aligned}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}(\tau) = & \int_0^\tau \frac{\partial \tau}{\cos \tau} - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\tau \cos \tau \partial \tau \\ & - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau \\ & - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^\tau \cos \tau^5 \partial \tau \\ & - \dots \end{aligned}$$

Aber

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial \tau}{\cos \tau} &= \int \frac{\partial \sin \tau}{\cos \tau^2} = \int \frac{\partial \sin \tau}{1 - \sin^2 \tau} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\partial \sin \tau}{1 - \sin \tau} + \frac{1}{2} \int \frac{\partial \sin \tau}{1 + \sin \tau} \\ &= \frac{1}{2} \{ l(1 + \sin \tau) - l(1 - \sin \tau) \}, \end{aligned}$$

und folglich

$$\int_0^\tau \frac{\partial \tau}{\cos \tau} = \frac{1}{2} l \frac{1 + \sin \tau}{1 - \sin \tau}$$

oder

$$\int_0^\tau \frac{\partial \tau}{\cos \tau} = l \cot(45^\circ - \frac{1}{2} \tau) = l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} \tau),$$

also

$$\begin{aligned} 80) \quad \mathfrak{S}(\tau) = & l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} \tau) - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\tau \cos \tau \partial \tau \\ & - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau \\ & - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^\tau \cos \tau^5 \partial \tau \\ & - \dots \end{aligned}$$

Zur Entwicklung der übrigen in dieser Formel vorkommen-
den Integrale liefert uns die Integralrechnung die bekannte Re-
ductionsformel

$$81) \int_0^\tau \cos \tau^n \partial \tau = \frac{\sin \tau \cos \tau^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int_0^\tau \cos \tau^{n-2} \partial \tau.$$

Gehen wir bloss bis auf Glieder, welche in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind, so ist

$$\int_0^\tau \cos \tau \partial \tau = \sin \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau = \frac{1}{3} \sin \tau \cos \tau^2 + \frac{2}{3} \sin \tau = \frac{1}{3} \sin \tau (2 + \cos \tau^2)$$

oder auch

$$\int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau = \sin \tau (1 - \frac{1}{3} \sin \tau^2);$$

also

$$82) \mathfrak{S}(\tau) = l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \tau) - \frac{1}{2} e^2 \sin \tau - \frac{1}{8} e^4 \sin \tau (1 - \frac{1}{3} \sin \tau^2),$$

oder auch

$$82^a) \mathfrak{S}(\tau) = l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \tau) - \frac{1}{2} e^2 \sin \tau - \frac{1}{48} e^4 \sin \tau (5 + \cos 2\tau).$$

Will man $\mathfrak{S}(\tau)$ in Minuten oder Secunden ausgedrückt haben, so muss man die vorhergehenden Ausdrücke noch respective durch $\operatorname{Arc} 1'$ oder $\operatorname{Arc} 1''$ dividiren.

Geht man nur bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so ist nach 75) und 82)

$$83) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B})} + \frac{1}{2} e^2 (\sin \mathfrak{B} - \sin \mathfrak{B}_1) \right\}$$

oder

$$84) \Omega = \operatorname{tang} \Theta \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B})} + e^2 \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1) \cos \frac{1}{2} (\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \right\}.$$

Auch diese Formeln müssen durch $\operatorname{Arc} 1'$ oder $\operatorname{Arc} 1''$ dividirt werden, wenn man Ω respective in Minuten oder in Secunden ausgedrückt haben will.

§. 21.

Das Integral

$$\mathfrak{G}(\tau) = a \int_0^\tau \sqrt{1 - e^2 \cos \tau^2} \cdot \partial \tau$$

kann in einem geschlossenen analytischen Ausdrucke nicht dargestellt werden, sondern lässt sich nur in eine unendliche Reihe entwickeln. Mittels des Binomischen Lehrsatzes erhält man nämlich auf ganz ähnliche Art wie im vorhergehenden Paragraphen auf der Stelle

$$85) \quad \mathfrak{G}(\tau) = a \left\{ \tau - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^\tau \cos \tau^4 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^\tau \cos \tau^6 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

wo die in dieser Formel noch vorkommenden bestimmten Integrale wieder mittelst der Reductionsformel 81) bestimmt werden müssen.

Geht man bloss bis auf Glieder, welche in Beziehung auf e von der vierten Ordnung sind, so ist

$$\int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau = \frac{1}{2} \sin \tau \cos \tau + \frac{1}{2} \int_0^\tau \partial \tau \\ = \frac{1}{2} (\tau + \sin \tau \cos \tau) = \frac{1}{2} (\tau + \frac{1}{2} \sin 2\tau)$$

und

$$\int_0^\tau \cos \tau^4 \partial \tau = \frac{1}{4} \sin \tau \cos \tau^3 + \frac{3}{4} \int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau \\ = \frac{3}{8} (\tau + \sin \tau \cos \tau + \frac{2}{3} \sin \tau \cos \tau^3) \\ = \frac{3}{8} \tau + \frac{3}{16} \sin 2\tau (1 + \frac{2}{3} \cos \tau^2) \\ = \frac{3}{8} \tau + \frac{1}{16} \sin 2\tau (3 + 2 \cos \tau^2) \\ = \frac{3}{8} \tau + \frac{1}{16} \sin 2\tau (4 + \cos 2\tau) \\ = \frac{3}{8} \tau + \frac{1}{4} \sin 2\tau + \frac{1}{32} \sin 4\tau;$$

also

$$86) \quad \mathfrak{G}(\tau) = a \left\{ \tau - \frac{1}{4} e^2 (\tau + \frac{1}{2} \sin 2\tau) \right. \\ \left. - \frac{1}{32} e^4 (\frac{3}{2} \tau + \sin 2\tau + \frac{1}{8} \sin 4\tau) \right\}$$

oder

$$87) \quad \Theta(\tau) = a \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4)\tau \\ &- \frac{1}{8}e^2(1 + \frac{1}{4}e^2)\sin 2\tau \\ &- \frac{1}{256}e^4\sin 4\tau \end{aligned} \right\}.$$

Ist τ in Minuten oder in Secunden ausgedrückt, so muss man in allen vorhergehenden Formeln für τ respective $\tau \text{ Arc } 1'$ oder $\tau \text{ Arc } 1''$ setzen.

Nach 75) und 87) ist

$$88) \quad s = a \sec \Theta \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4)(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \\ &- \frac{1}{8}e^2(1 + \frac{1}{4}e^2)(\sin 2\mathfrak{B}_1 - \sin 2\mathfrak{B}) \\ &- \frac{1}{256}e^4(\sin 4\mathfrak{B}_1 - \sin 4\mathfrak{B}) \end{aligned} \right\}$$

oder

$$89) \quad s = a \sec \Theta \left\{ \begin{aligned} &(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4)(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \\ &+ \frac{1}{4}e^2(1 + \frac{1}{4}e^2)\sin(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1)\cos(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \\ &+ \frac{1}{128}e^4\sin 2(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1)\cos 2(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \end{aligned} \right\}.$$

Bis auf Glieder der zweiten Ordnung genau ist

$$90) \quad s = a \sec \Theta \left\{ (1 - \frac{1}{4}e^2)(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) + \frac{1}{8}e^2(\sin 2\mathfrak{B} - \sin 2\mathfrak{B}_1) \right\}$$

oder

$$91) \quad s = a \sec \Theta \left\{ (1 - \frac{1}{4}e^2)(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) + \frac{1}{4}e^2\sin(\mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1)\cos(\mathfrak{B} + \mathfrak{B}_1) \right\}.$$

Ist $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}$ in Minuten oder Secunden ausgedrückt, so muss man in den vorhergehenden Formeln für $\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}$ respective $(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \text{ Arc } 1'$ oder $(\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \text{ Arc } 1''$ setzen.

§. 22.

Es ist hier nicht unser Zweck, die Loxodrome nach ihren geometrischen Eigenschaften vollständig zu betrachten, da es uns im Vorhergehenden nur darauf ankam, die Formeln zu gewinnen, welche als Grundformeln der loxodromischen Trigonometrie zu betrachten und zur vollständigen Auflösung der sämtlichen Aufgaben derselben nothwendig erforderlich sind; jedoch wollen wir, bevor wir im folgenden Kapitel zu der Auflösung dieser Aufgaben übergehen, wenigstens noch die Gleichungen der Berührenden der Loxodrome in einem bestimmten Punkte derselben, und die Gleichung ihrer Projection auf der Ebene des Aequators entwickeln.

Was zuerst die Berührende der Loxodrome in dem bestimmten Punkte (uvw) derselben betrifft, so sind bekanntlich

$$x - u = \frac{\partial u}{\partial w} (z - w), \quad y - v = \frac{\partial v}{\partial w} (z - w)$$

die Gleichungen dieser Berührenden. Bezeichnen wir nun die Länge und wahre Breite des Punktes (uvw) durch ω und $\bar{\omega}$, so ist nach 25)

$$\frac{\partial u}{\partial w} = - \frac{\sin \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) + b^2 \cos \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\cos \omega \cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2) - b^2 \sin \omega \sin \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}{b^2 \cos \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega}}$$

und nach 26)

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \omega} = \frac{\cos \bar{\omega} (a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2)}{b^2 \tan \Theta}$$

Also ist, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$92) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial w} = - \frac{\sin \omega + \cot \Theta \cos \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}}, \\ \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{\cos \omega - \cot \Theta \sin \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}}; \end{cases}$$

und die Gleichungen der Berührenden der Loxodrome in dem Punkte (uvw) oder $(\omega \bar{\omega})$ derselben sind folglich, wenn man zugleich für u, v, w ihre aus 23) sich unmittelbar ergebenden Werthe einführt:

$$93) \begin{cases} x = \frac{a^2 \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}} \\ = - \frac{\sin \omega + \cot \Theta \cos \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}} \left(z - \frac{b^2 \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}} \right), \\ y = \frac{a^2 \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}} \\ = \frac{\cos \omega - \cot \Theta \sin \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}} \left(z - \frac{b^2 \sin \bar{\omega}}{\sqrt{a^2 \cos \bar{\omega}^2 + b^2 \sin \bar{\omega}^2}} \right); \end{cases}$$

oder auch

$$94) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{a \cos \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}}} \\ &= \frac{\sin \omega + \cot \Theta \cos \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}} \left\{ z = \frac{a (1 - e^2) \sin \bar{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2}} \right\}, \\ y &= \frac{a \sin \omega \cos \bar{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2}} \\ &= \frac{\cos \omega - \cot \Theta \sin \omega \sin \bar{\omega}}{\cot \Theta \cos \bar{\omega}} \left\{ z = \frac{a (1 - e^2) \sin \bar{\omega}}{\sqrt{1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

§. 23.

Um ferner die Gleichung der Projection der Loxodrome auf der Ebene des Aequators zu finden, bezeichne man die Projectionen der nach den Punkten auf der Oberfläche des Erdellipsoids, deren wahre Breiten B, B_1 sind, gezogenen Erdhalbmesser auf der Ebene des Aequators durch r, r_1 ; so ist, wie aus den in §. 14. entwickelten Formeln leicht geschlossen wird:

$$95) \left\{ \begin{aligned} r &= \frac{a^2 \cos B}{\sqrt{a^2 \cos B^2 + b^2 \sin B^2}}, \\ r_1 &= \frac{a^2 \cos B_1}{\sqrt{a^2 \cos B_1^2 + b^2 \sin B_1^2}}. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich mittelst leichter Rechnung

$$\sin B^2 = \frac{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}{1 - e^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2}, \quad \sin B_1^2 = \frac{1 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2}{1 - e^2 \left(\frac{r_1}{a}\right)^2};$$

also

$$96) \sin B = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}{\sqrt{1 - e^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2}}, \quad \sin B_1 = \pm \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{r_1}{a}\right)^2}}{\sqrt{1 - e^2 \left(\frac{r_1}{a}\right)^2}};$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem die Breiten B, B_1 positiv oder negativ sind, d. h. jenachdem die entsprechenden Punkte, von denen wir jetzt den Punkt, welcher die Breite B hat, den Anfangspunkt, den Punkt, welcher die Breite

B_1 hat, den Endpunkt der Loxodrome nennen wollen, auf der positiven oder negativen Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegen.

Weil nun bekanntlich allgemein

$$\Omega \cot \Theta = \frac{1}{2} l \frac{(1 - \sin B)(1 + \sin B_1)}{(1 + \sin B)(1 - \sin B_1)} - \frac{1}{2} e l \frac{(1 - e \sin B)(1 + e \sin B_1)}{(1 + e \sin B)(1 - e \sin B_1)}$$

ist; so ist, wenn der Anfangspunkt und Endpunkt der Loxodrome beide auf der positiven Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegen:

$$97) \Omega \cot \Theta = \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - \sqrt{a^2 - r_1^2})} - \frac{1}{2} e l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - e \sqrt{a^2 - r_1^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + e \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - e \sqrt{a^2 - r_1^2})}$$

Wenn dagegen der Anfangspunkt und Endpunkt der Loxodrome beide auf der negativen Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegen, so ist

$$98) \Omega \cot \Theta = \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + \sqrt{a^2 - r_1^2})} - \frac{1}{2} e l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - e \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + e \sqrt{a^2 - r_1^2})}$$

Wenn der Anfangspunkt der Loxodrome auf der positiven, der Endpunkt derselben auf der negativen Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegt, so ist

$$99) \Omega \cot \Theta = \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + \sqrt{a^2 - r_1^2})} - \frac{1}{2} e l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - e \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + e \sqrt{a^2 - r_1^2})}$$

Wenn der Anfangspunkt der Loxodrome auf der negativen, der Endpunkt derselben auf der positiven Hälfte der Oberfläche des Erdellipsoids liegt, so ist

$$100) \Omega \cot \Theta =$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - \sqrt{a^2 - r_1^2})} \\ & - \frac{1}{2} e l \frac{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} + e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} + e \sqrt{a^2 - r_1^2})}{(\sqrt{a^2 - e^2 r^2} - e \sqrt{a^2 - r^2})(\sqrt{a^2 - e^2 r_1^2} - e \sqrt{a^2 - r_1^2})}. \end{aligned}$$

Im folgenden Kapitel wollen wir uns nun mit der Auflösung der verschiedenen Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie beschäftigen.

Zweites Kapitel.

Auflösung der verschiedenen Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie.

§. 24.

Wenn man für die fünf Bestimmungsstücke $B, B_1, \Omega, \Theta, s$ eines loxodromischen Dreiecks, wo man übrigens statt der wahren Breiten B, B_1 auch die reducirten Breiten $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ einführen kann, die Combinationen ohne Wiederholungen der dritten Klasse entwickelt, so erhält man nach bekannten Regeln die folgende Darstellung:

$$\begin{array}{r}
 B, \quad B_1, \quad \Omega, \quad \Theta, \quad s \\
 \hline
 BB_1, \quad B\Omega, \quad B\Theta, \quad Bs \\
 B_1\Omega, \quad B_1\Theta, \quad B_1s \\
 \Omega\Theta, \quad \Omega s \\
 \hline
 \Theta s \\
 \hline
 BB_1\Omega, \quad BB_1\Theta, \quad BB_1s \\
 B\Omega\Theta, \quad B\Omega s \\
 B\Theta s \\
 B_1\Omega\Theta, \quad B_1\Omega s \\
 B_1\Theta s \\
 \Omega\Theta s
 \end{array}$$

und sieht also, wenn man die in den einzelnen Combinationen der dritten Klasse vorkommenden Elemente als gegebene Stücke betrachtet, hieraus, dass in der loxodromischen Trigonometrie überhaupt zehn Aufgaben vorkommen können.

Diese Aufgaben wollen wir nun, wenn auch nicht ganz in derselben Ordnung, wie sie sich aus der obigen Darstellung der dritten Combinationsklasse der fünf Bestimmungsstücke eines loxodromischen Dreiecks ergeben, im Folgenden auflösen versuchen. Dabei wollen wir stets die Längendifferenz und die Breiten in Minuten ausgedrückt annehmen; wären dieselben, wenn man grössere Genauigkeit verlangte, in Secunden ausgedrückt, so würde man in den im Folgenden vorkommenden Formeln statt des Symbols $Arc 1'$ bloss das Symbol $Arc 1''$ zu setzen haben, was hier ein für alle Mal bemerkt wird.

§. 25.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 und die Längendifferenz Ω gegeben sind: den Curs Θ und die Distanz s zu finden.

Auflösung. Man sucht zuerst den Curs Θ auf folgende Weise. Da nämlich die gegebene Längendifferenz Ω nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen allgemeinen Bestimmung in Minuten ausgedrückt ist, so haben wir nach Kap. I. Nr. 54) die Gleichung

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \end{array} \right\},$$

aus der sich sogleich die Formel

$$\cot \Theta = \frac{1}{\Omega \text{Arc } 1'} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \end{array} \right\}$$

ergiebt, mittelst welcher der Curs Θ ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden kann, indem man nur immer festzuhalten hat, dass der Curs stets positiv und nicht grösser als 180° ist.

Die vorhergehende Formel ist völlig genau; wollte man sich aber mit einer annähernden Auflösung begnügen, und schon bei Gliedern, die in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, stehen bleiben, so hätte man nach Kap. I. Nr. 58) die Formel

$$\Omega =$$

$$\frac{\text{tang} \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2 e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\},$$

also

$$\cot \Theta =$$

$$\frac{1}{\Omega \text{ Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2 e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\}.$$

Beabsichtigt man weiter zu gehen, als bloss bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so wird man sich entweder der aus Kap. I. Nr. 57) unmittelbar sich ergebenden Formel

$$\cot \Theta = \frac{1}{\Omega \text{ Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 b (\sin B - \sin B_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}$$

bedienen; oder man kann auch zuerst aus den wahren Breiten B, B_1 die reducirten Breiten $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_1$ berechnen, etwa mittelst der Formeln

$$\text{tang } \mathfrak{B} = \frac{b}{a} \text{tang } B = \text{tang } B \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

$$\text{tang } \mathfrak{B}_1 = \frac{b}{a} \text{tang } B_1 = \text{tang } B_1 \cdot \sqrt{1 - e^2};$$

oder nach einer anderen der in §. 8. gelehrtten Methoden diese Berechnung anstellen, und hat dann nach Kap. I. Nr. 75) und Nr. 80) die Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B})} - \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

also

$$\cot \Theta = \frac{1}{\Omega \operatorname{Arc} 1'} \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B})} - \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

wo die in dieser Formel vorkommenden bestimmten Integrale am besten mittelst der aus Kap. I. Nr. 81) sich ergebenden Formel

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^n \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^{n-1} - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^{n-1}}{n} + \frac{n-1}{n} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^{n-2} \partial \tau,$$

also mittelst der Formeln

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau = \sin \mathfrak{B}_1 - \sin \mathfrak{B} = 2 \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \cos \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}),$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^2 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^2}{3} + \frac{2}{3} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau,$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^4 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^4}{5} + \frac{4}{5} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau,$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^7 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^6 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^6}{7} + \frac{6}{7} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau,$$

u. s. w.

gefunden werden.

Auf diese Weise scheint im vorhergehenden Falle die Rechnung sich am besten führen zu lassen, und ich will mich daher mit der Aufstellung noch anderer Formeln, die sich übrigens aus dem vorhergehenden Kapitel leicht ergeben würden, wenn man ihrer bedürfen sollte, nicht aufhalten.

Für die Kugel, d. h. für $e = 0$, ist nach dem Vorhergehenden mit völliger Genauigkeit

$$\cot \Theta = \frac{1}{\Omega \operatorname{Arc} 1'} l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}.$$

Nachdem man so den Curs Θ bestimmt hat, findet man die gesuchte Distanz s , wenn man bloss bis auf Glieder der zweiten Ordnung zu gehen beabsichtigt, mittelst der Formel Kap. I. Nr. 68), nämlich mittelst der Formel

$$s = \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2)(B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4}e^2 \sin(B - B_1) \cos(B + B_1) \right\}.$$

Will man weiter gehen als bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so ist nach Kap. I. Nr. 64)

$$s = \frac{a(1-e^2)}{\cos \Theta} \left\{ (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{2}e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} + \frac{3.5}{2.4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} + \frac{3.5.7}{2.4.6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} + \dots \right\},$$

wo die in dieser Formel vorkommenden bestimmten Integrale mittelst der Reductionsformel

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^n \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1^{n-1} \cos B_1 - \sin B^{n-1} \cos B}{n} + \frac{n-1}{n} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^{n-2} \partial \bar{\omega},$$

also mittelst der Formeln

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1 \cos B_1 - \sin B \cos B}{2} + \frac{1}{2} (B_1 - B) \text{Arc } 1',$$

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1^3 \cos B_1 - \sin B^3 \cos B}{4} + \frac{3}{4} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega},$$

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1^5 \cos B_1 - \sin B^5 \cos B}{6} + \frac{5}{6} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega},$$

u. s. w.

wo auch

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = \frac{1}{2} (B_1 - B) \text{Arc } 1' - \frac{1}{2} \sin(B_1 - B) \cos(B_1 + B)$$

ist, berechnet werden können.

Für die Kugel, d. h. für $e = 0$, ist

$$s = \frac{a}{\cos \Theta} (B_1 - B) \text{Arc } 1' = a \sec \Theta \cdot (B_1 - B) \text{Arc } 1'.$$

Rechnet man auf einen Grad des Aequators 60 Seemeilen, so ist, weil $a\pi$ der halbe Umfang des Aequators ist,

$$\frac{a\pi}{180 \cdot 60}$$

die Länge einer Seemeile; nun ist aber

$$\text{Arc } 1' = \frac{\pi}{180 \cdot 60},$$

und folglich $a \text{Arc } 1'$ die Länge einer Seemeile.

Will man daher die Distanz s in Seemeilen ausgedrückt haben, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar bis auf Glieder der zweiten Ordnung genau

$$s =$$

$$\frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4}e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\}$$

oder allgemein

$$s = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{2}e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} + \dots \right\},$$

wo die bestimmten Integrale wie vorher berechnet werden.

Für die Kugel, d. h. für $e = 0$, ist jetzt

$$s = \frac{B_1 - B}{\cos \Theta} = (B_1 - B) \sec \Theta.$$

Wollte man sich der reducirten Breiten bedienen, so hätte man nach Kap. I. Nr. 75) und Nr. 85) die Formel

$$s = \frac{a}{\cos \Theta} \left\{ (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \operatorname{Arc} 1' - \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^2 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^4 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^6 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

oder, wenn s in Seemeilen ausgedrückt sein soll:

$$s = \frac{\sec \Theta}{\operatorname{Arc} 1'} \left\{ (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \operatorname{Arc} 1' - \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^2 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^4 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^6 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

wo die in diesen Formeln vorkommenden bestimmten Integrale mittelst der Formeln

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^2 \partial \tau = \frac{1}{2} (\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \operatorname{Arc} 1' \\ = \frac{1}{2} \sin (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \cos (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}) + \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \operatorname{Arc} 1',$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^4 \partial \tau = \frac{1}{4} (\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^3 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^3) + \frac{3}{4} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^2 \partial \tau,$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^6 \partial \tau = \frac{1}{6} (\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^5 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^5) + \frac{5}{6} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^4 \partial \tau,$$

u. s. w.

berechnet werden müssen.

Rücksichtlich der Breiten und der Längendifferenz ist es, wenn man die Seemeile als Einheit des Längenmaasses zum Grunde legt, oder auch überhaupt, ganz gleichgültig, ob man sagt, sie seien in Minuten oder in Seemeilen ausgedrückt.

Die Auflösung dieser Aufgabe und der meisten noch folgenden Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie wird ungemein erleichtert, wenn man sich zweier Tafeln bedient, über deren beste Einrichtung und Berechnungsart wir Folgendes zu bemerken für nöthig halten.

Wenn wie gewöhnlich im Allgemeinen $\bar{\omega}$ die wahre Breite und τ die derselben entsprechende reducirte Breite bezeichnet, so ist nach Kap. I. Nr. 27) und Nr. 38)

$$\partial \bar{\omega} = \frac{(1 - e^2) \operatorname{tang} \Theta \partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})} = \frac{\operatorname{tang} \Theta \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau$$

und nach Kap. I. Nr. 33) und Nr. 38)

$$\partial s = \frac{a (1 - e^2) \partial \bar{\omega}}{\cos \Theta (1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})^{\frac{3}{2}}} = \frac{a \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \Theta} \partial \tau.$$

Sollen nun die Längendifferenz Ω und die Distanz s in Seemeilen ausgedrückt sein, so ist, weil $a \operatorname{Arc} 1'$ die Länge einer Seemeile ist, offenbar

$$\Omega = \operatorname{tang} \Theta \cdot \frac{1 - e^2}{\operatorname{Arc} 1'} \int_B^{B_1} \frac{\partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})}$$

$$= \operatorname{tang} \Theta \cdot \frac{1}{\operatorname{Arc} 1'} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau,$$

$$s = \sec \Theta \cdot \frac{1 - e^2}{\operatorname{Arc} 1'} \int_B^{B_1} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \sec \Theta \cdot \frac{1}{\operatorname{Arc} 1'} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau} \cdot \partial \tau.$$

Setzen wir also

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1 - e^2}{\operatorname{Arc} 1'} \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})} = \frac{1}{\operatorname{Arc} 1'} \int_0^{\tau} \frac{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau}}{\cos \tau} \partial \tau,$$

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \frac{1 - e^2}{\operatorname{Arc} 1'} \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1 - e^2 \sin^2 \bar{\omega})^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\operatorname{Arc} 1'} \int_0^{\tau} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 \tau} \cdot \partial \tau;$$

so ist

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \operatorname{tang} \Theta,$$

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta.$$

Wenn man also eine Tafel der Function $\Phi(\bar{\omega})$ und eine Tafel der Function $\Gamma(\bar{\omega})$ hat, jede mit der wahren Breite $\bar{\omega}$ als Argument, so kann man unsere Aufgabe sehr leicht auf folgende Art auflösen.

In die Tafel für $\Phi(\bar{\omega})$ gehe man mit den Argumenten B und B_1 ein, und nehme aus derselben $\Phi(B)$ und $\Phi(B_1)$; dann ist nach dem Obigen

$$\text{tang } \Theta = \frac{\Omega}{\Phi(B_1) - \Phi(B)},$$

wodurch man den Curs Θ findet. Hierauf gehe man in die Tafel für $\Gamma(\bar{\omega})$ wieder mit den Argumenten B und B_1 ein, und nehme aus derselben $\Gamma(B)$ und $\Gamma(B_1)$, so ist nach dem Obigen

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta,$$

wodurch sich also auch die gesuchte, in Seemeilen ausgedrückte Distanz s ergibt.

Was die Berechnung der beiden in Rede stehenden Tafeln betrifft, so ist alles dazu Nöthige im Wesentlichen schon im ersten Kapitel gesagt worden, und soll daher hier nur ganz in der Kürze wiederholt werden.

Zur Berechnung der Tafel für $\Phi(\bar{\omega})$ ergibt sich aus §. 17. unmittelbar die Formel

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \text{ tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega}) - \frac{1}{2} e l \frac{1 + e \sin \bar{\omega}}{1 - e \sin \bar{\omega}} \right\};$$

und für die Kugel, d. i. für $e = 0$,

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\text{Arc } 1'} l \text{ tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega});$$

welche Formeln völlig genau sind.

Zur Berechnung der Tafel für $\Gamma(\bar{\omega})$ hat man aber nach §. 18. die Reihe

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \left\{ \bar{\omega} \text{ Arc } 1' + \frac{3}{2} e^2 \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} + \dots \right\},$$

wo

$$\int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = -\frac{1}{2} \sin \bar{\omega} \cos \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \operatorname{Arc} 1'$$

$$= -\frac{1}{4} \sin 2 \bar{\omega} + \frac{1}{2} \bar{\omega} \operatorname{Arc} 1',$$

$$\int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} = -\frac{1}{4} \sin \bar{\omega}^3 \cos \bar{\omega} + \frac{3}{4} \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega},$$

$$\int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} = -\frac{1}{6} \sin \bar{\omega}^5 \cos \bar{\omega} + \frac{5}{6} \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega},$$

$$\int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^8 \partial \bar{\omega} = -\frac{1}{8} \sin \bar{\omega}^7 \cos \bar{\omega} + \frac{7}{8} \int_0^{\bar{\omega}} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega},$$

u. s. w.

ist.

Für die Kugel, d. i. für $e = 0$, ist

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega}.$$

Will man die Berechnung beider Tafeln auf die Ermittlung der Summen unendlicher Reihen gründen, so bedient man sich statt der wahren Breiten besser der reducirten Breiten, und berechnet daher zuerst aus der wahren Breite $\bar{\omega}$, welche das Argument der Tafeln sein soll, die reducirte Breite τ mittelst der bekannten Formel

$$\operatorname{tang} \tau = \operatorname{tang} \bar{\omega} \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

oder mittelst einer anderen der in §. 8. zu diesem Zwecke gelehrtten Methoden. Dann hat man nach §. 20. und §. 21. die Formeln

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1}{\operatorname{Arc} 1'} \left\{ l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} \tau) - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\tau \cos \tau \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^\tau \cos \tau^5 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\}$$

und

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \frac{1}{\text{Arc } 1'} \left\{ \tau \text{Arc } 1' - \frac{1}{2} e^2 \int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_0^\tau \cos \tau^4 \partial \tau - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_0^\tau \cos \tau^6 \partial \tau - \dots \right\},$$

wo

$$\int_0^\tau \partial \tau = \tau \text{Arc } 1',$$

$$\int_0^\tau \cos \tau \partial \tau = \sin \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau = \frac{1}{2} \sin \tau \cos \tau + \frac{1}{2} \int_0^\tau \partial \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau = \frac{1}{3} \sin \tau \cos \tau^2 + \frac{2}{3} \int_0^\tau \cos \tau \partial \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^4 \partial \tau = \frac{1}{4} \sin \tau \cos \tau^3 + \frac{3}{4} \int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^5 \partial \tau = \frac{1}{5} \sin \tau \cos \tau^4 + \frac{4}{5} \int_0^\tau \cos \tau^3 \partial \tau,$$

$$\int_0^\tau \cos \tau^6 \partial \tau = \frac{1}{6} \sin \tau \cos \tau^5 + \frac{5}{6} \int_0^\tau \cos \tau^4 \partial \tau,$$

u. s. w.

ist. Auch ist

$$\int_0^\tau \cos \tau^2 \partial \tau = \frac{1}{4} \sin 2\tau + \frac{1}{2} \tau \text{Arc } 1'.$$

Für die Kugel ist

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \tau,$$

was der obigen Gleichung $\Gamma(\bar{\omega}) = \bar{\omega}$ keineswegs widerspricht,

da auf der Kugel die wahren und reducirten Breiten nicht von einander verschieden sind.

Hat man Tafeln der Functionen $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ für die Kugel, so lassen sich Tafeln dieser Functionen für das Ellipsoid sehr leicht aus denselben ableiten, da es dann bloss auf die Berechnung von Correctionen ankommt, welche wegen der Kleinheit von e für die Erde sehr klein sind, und sich aus den obigen Reihen ganz von selbst ergeben.

Tafeln der Function $\Phi(\overline{\omega})$ finden sich für die Kugel in allen Schifffahrts-Lehrbüchern unter dem Namen der Tafel der Meridionaltheile oder der Tafel der wachsenden Breiten, z. B. in Röhl's Steuermannskunst. Greifswald. 1778. Taf. XIII. und in Cours d'observations nautiques. Par P. Ducom. A Bordeaux. 1820. Table XXII., welche Tafeln durch alle einzelnen Grade und Minuten der Breite von 0^0 bis 90^0 fortschreiten. In dem trefflichen Handbuch der Schifffahrts-Kunde, mit einer Sammlung von Seemanns-Tafeln, einer See-Karte und einer magnetischen Karte. Im Auftrage der Hamburgischen Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Kenntnisse verfasst von C. Rümker. Vierte Auflage. 1844. ist Tafel XXXI. eine die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigende Tafel der Meridionaltheile oder vergrösserten Breiten, welche gleichfalls durch alle einzelnen Grade und Minuten der Breite von 0^0 bis 90^0 fortschreitet.

Eine Tafel der Function $\Gamma(\overline{\omega})$ findet sich zwar unter den nautischen Tafeln noch nicht; dieselbe würde sich jedoch aus den vorhandenen Tafeln der Kreisbogen ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Jedenfalls dürfte es zweckmässig sein, die beiden Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ sowohl für die Kugel, als auch, mit Zugrundelegung der neuesten und genauesten Bestimmungen der Dimensionen des Erdkörpers, für das Ellipsoid, in der erforderlichen Ausdehnung von Neuem zusammenzustellen, und in einem besonderen Werkchen mit einander zu vereinigen, was mir hoffentlich bald möglich sein wird, weshalb ich es jetzt unterlasse, der vorliegenden Schrift über loxodromische Trigonometrie die schon vorhandenen Tafeln ganz oder im Auszuge beizufügen. Dessenungeachtet aber werde ich nicht unterlassen, auch bei den folgenden Aufgaben zu zeigen, wie sich ihre Auflösung durch die in Rede stehenden Tafeln, welche ich im Folgenden in der Kürze die Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$

und $\Gamma(\bar{\omega})$ nennen werde, wesentlich erleichtern lässt, wie dies schon bei der in diesem Paragraphen aufgelösten Aufgabe vorher auf eine gewiss sehr in die Augen fallende Weise erkannt worden ist.

§. 26.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 und der Curs Θ gegeben sind: die Längendifferenz Ω und die Distanz s zu finden.

Auflösung. Zur Berechnung der Längendifferenz Ω hat man nach Kap. I. Nr. 54) die völlig genaue Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \right\}.$$

Will man sich mit einer Näherung begnügen, und schon bei Gliedern stehen bleiben, welche in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, so ist nach Kap. I. Nr. 58)

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2e^2 \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) \right\}.$$

Will man weiter gehen als bis auf Glieder der zweiten Ordnung, so hat man nach Kap. I. Nr. 57) die Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) + \dots \right\},$$

oder man berechnet zuerst aus den wahren Breiten B , B_1 die reducirten Breiten $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}_1$ mittelst der Formeln

$$\text{tang } \mathfrak{B} = \frac{b}{a} \text{tang } B = \text{tang } B \cdot \sqrt{1 - e^2},$$

$$\text{tang } \mathfrak{B}_1 = \frac{b}{a} \text{tang } B_1 = \text{tang } B_1 \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

oder anderer bekannter Methoden, und hat dann nach Kap. I. Nr. 75) und Nr. 80) die Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B}_1)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} \mathfrak{B})} - \frac{1}{2} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1}{2 \cdot 4} e^4 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^2 \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau \right. \\ \left. - \dots \dots \dots \right\},$$

wo die bestimmten Integrale mittelst der Formeln

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau = \sin \mathfrak{B}_1 - \sin \mathfrak{B} = 2 \sin \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 - \mathfrak{B}) \cos \frac{1}{2} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}),$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^2 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^2}{3} + \frac{2}{3} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau \partial \tau,$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^4 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^4}{5} + \frac{4}{5} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^3 \partial \tau,$$

$$\int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^7 \partial \tau = \frac{\sin \mathfrak{B}_1 \cos \mathfrak{B}_1^6 - \sin \mathfrak{B} \cos \mathfrak{B}^6}{7} + \frac{6}{7} \int_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{B}_1} \cos \tau^5 \partial \tau,$$

u. s. w.

berechnet werden.

Für die Kugel, d. h. für $e=0$, ist

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B)}.$$

Die Distanz s findet man ganz auf dieselbe Art wie im vorhergehenden Paragraphen.

Mittelst der Tafeln für $\Phi(\overline{w})$ und $\Gamma(\overline{w})$ löst man unsere Aufgabe sehr leicht auf, wenn man in dieselben mit den Argumenten B und B_1 eingeht, und aus ihnen $\Phi(B)$, $\Gamma(B)$ und $\Phi(B_1)$, $\Gamma(B_1)$ entnimmt; dann ist nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \text{tang } \Theta,$$

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta;$$

mittelst welcher Formeln also die beiden gesuchten Grössen Ω und s sehr leicht berechnet werden können.

§. 27.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 , und die Distanz s gegeben sind: den Curs Θ und die Längendifferenz Ω zu finden.

Auflösung. Den Curs Θ findet man, wenn man bloss bis zu Gliedern zu gehen beabsichtigt, welche in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, mittelst der aus Kap. I. Nr. 68) sich unmittelbar ergebenden Formel

$$\cos \Theta = \frac{a(1-e^2)}{s} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2)(B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4}e^2 \sin(B - B_1) \cos(B + B_1) \right\},$$

oder, wenn man die Genauigkeit weiter treiben will, mittelst der aus Kap. I. Nr. 64) fliessenden Formel

$$\cos \Theta = \frac{a(1-e^2)}{s} \left\{ (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{2}e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} + \dots \right\}.$$

Für die Kugel, d. h. für $e = 0$, ist

$$\cos \Theta = \frac{a}{s} (B_1 - B) \text{Arc } 1'.$$

Ist aber s in Seemeilen ausgedrückt, so ist, wenn man bloss bis auf Glieder, welche in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, gehen will,

$$\cos \Theta = \frac{1-e^2}{s \text{Arc } 1'} \left\{ (1 + \frac{3}{4}e^2)(B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4}e^2 \sin(B - B_1) \cos(B + B_1) \right\},$$

oder, wenn man die Genauigkeit weiter zu treiben beabsichtigt:

$$\cos \Theta = \frac{1-e^2}{s \operatorname{Arc} 1'} \left\{ (B_1 - B) \operatorname{Arc} 1' + \frac{3}{2} e^2 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} \right. \\ \left. + \dots \right\},$$

und für die Kugel:

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s}.$$

Die in den obigen Ausdrücken vorkommenden bestimmten Integrale werden mittelst der Formeln

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1 \cos B_1 - \sin B \cos B}{2} + \frac{1}{2} (B_1 - B) \operatorname{Arc} 1',$$

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1^3 \cos B_1 - \sin B^3 \cos B}{4} + \frac{3}{4} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega},$$

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^6 \partial \bar{\omega} = - \frac{\sin B_1^5 \cos B_1 - \sin B^5 \cos B}{6} + \frac{5}{6} \int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^4 \partial \bar{\omega},$$

u. s. w.

wo auch

$$\int_B^{B_1} \sin \bar{\omega}^2 \partial \bar{\omega} = \frac{1}{2} (B_1 - B) \operatorname{Arc} 1' - \frac{1}{2} \sin (B_1 - B) \cos (B_1 + B)$$

ist, berechnet.

Nachdem man auf diese Weise den Curs Θ gefunden hat, findet man die Längendifferenz Ω ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen.

Mittelst der Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$ löst man unsere Aufgabe auf folgende Art auf. Indem man mit den Argumenten B und B_1 in diese Tafeln eingeht, entnimmt man aus denselben $\Phi(B)$, $\Gamma(B)$ und $\Phi(B_1)$, $\Gamma(B_1)$, und hat dann zur Bestimmung der gesuchten Grössen Θ und Ω die Formeln:

$$\cos \Theta = \frac{\Gamma(B_1) - \Gamma(B)}{s},$$

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \operatorname{tang} \Theta;$$

wo, wie immer bei dem Gebrauche der Tafeln, die Distanz s natürlich in Seemeilen ausgedrückt sein muss.

§. 28.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , die Längendifferenz Ω und der Curs Θ gegeben sind: die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 und die Distanz s zu finden.

Auflösung. Sehr leicht wird diese Aufgabe mit Hülfe der Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ aufgelöst. Aus der bekannten Gleichung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \operatorname{tang} \Theta$$

ergiebt sich nämlich

$$\Phi(B_1) = \Phi(B) + \Omega \cot \Theta,$$

und man kann also mittelst dieser Formel $\Phi(B_1)$ leicht mit Hülfe der Tafel für $\Phi(\overline{\omega})$ berechnen. Geht man dann in diese Tafel mit dem bekannten $\Phi(B_1)$ ein, so kann man aus derselben das entsprechende B_1 entnehmen. Da man nun B und B_1 kennt, so ergiebt sich mit Hülfe der Tafel für $\Gamma(\overline{\omega})$ die gesuchte Grösse s nach der Formel

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta.$$

Weit beschwerlicher wird die Rechnung, wenn man keine Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ besitzt, und man kann sich dann bloss durch eine Näherung helfen.

Betrachtet man nämlich zuerst das Erdellipsoid näherungsweise als eine Kugel, oder setzt $e = 0$, so ist nach Kap. I. Nr. 57)

$$\Omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{Arc} 1'} l \frac{\operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} B)},$$

woraus leicht

$$l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} B_1) = l \operatorname{tang} (45^\circ + \frac{1}{2} B) + \Omega \cot \Theta \cdot \operatorname{Arc} 1'$$

folgt, mittelst welcher Formel man einen ersten Näherungswerth B_1 der gesuchten Breite, welche der grösseren Länge entspricht, finden kann.

Bezeichnen wir nun einen zweiten Näherungswerth der gesuchten Breite durch $B_1 + \Delta B_1$, und gehen bloss bis auf Glieder, welche in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, so ist nach Kap. I. Nr. 57)

$$\Omega =$$

$$\frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2}(B_1 + \Delta B_1))}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin(B_1 + \Delta B_1)) \right\},$$

also nach dem Taylor'schen Lehrsatz, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, die in Bezug auf ΔB_1 von der ersten Ordnung sind, und annimmt, dass ΔB_1 in Minuten ausgedrückt sei:

$$\begin{aligned} & l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B) + \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1' \\ &= l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) + \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial B_1} \Delta B_1 \cdot \text{Arc } 1' \\ &+ e^2 (\sin B - \sin B_1 - \frac{\partial \sin B_1}{\partial B_1} \Delta B_1 \cdot \text{Arc } 1') \end{aligned}$$

d. i., weil nach dem Vorhergehenden

$$l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B) + \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1' = l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)$$

ist:

$$\begin{aligned} & - e^2 (\sin B - \sin B_1) \\ &= \left\{ \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial B_1} - e^2 \frac{\partial \sin B_1}{\partial B_1} \right\} \Delta B_1 \cdot \text{Arc } 1'. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial B_1} \\ &= \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)} \cdot \frac{\partial \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)} \cdot \frac{\partial (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial B_1} \\ &= \frac{1}{2} \cot(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) \sec(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)^2 \\ &= \frac{1}{2 \sin(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) \cos(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)} = \frac{1}{\sin(90^\circ + B_1)} \\ &= \frac{1}{\cos B_1} = \sec B_1, \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \sin B_1}{\partial B_1} = \cos B_1;$$

also

$$\frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\partial B_1} = e^2 \frac{\partial \sin B_1}{\partial B_1} \\ = \frac{1 - e^2 \cos B_1^2}{\cos B_1},$$

und folglich, weil

$$\sin B - \sin B_1 = 2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)$$

ist:

$$\Delta B_1 = - 2 e^2 \frac{\cos B_1 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)}{(1 - e^2 \cos B_1^2) \text{Arc } 1'},$$

oder, weil

$$\frac{1}{1 - e^2 \cos B_1^2} = 1 + e^2 \cos B_1^2 + e^4 \cos B_1^4 + \dots$$

ist, mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind:

$$\Delta B_1 = - \frac{2 e^2 \cos B_1 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)}{\text{Arc } 1'}$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Correction ΔB_1 berechnen, welche man dem vorher gefundenen ersten Näherungswerthe B_1 der Breite, welche der grösseren Länge entspricht, noch beifügen muss, um einen zweiten Näherungswerth $B_1 + \Delta B_1$ dieser Breite zu finden.

Hiernach wird es nun keine Schwierigkeit haben, die gesuchte Breite B_1 so zu bestimmen, dass der Gleichung

$$\Omega = \frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1} \left\{ l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \right\}$$

oder der Gleichung

$$\Omega = \frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1} \left\{ l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}$$

vollständig genügt wird.

Nachdem man die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 auf diese Weise gefunden hat, findet man die gesuchte Distanz s ganz wie in §. 25.

§. 29.

Aufgabe. Wenn die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 , die Längendifferenz Ω und der Curs Θ gegeben sind: die der kleineren Länge entsprechende Breite B und die Distanz s zu finden.

Auflösung. Sehr leicht wird auch diese Aufgabe mit Hülfe der Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ aufgelöst. Aus der Gleichung

$$\Omega = \{\Phi(B_1) - \Phi(B)\} \tan \Theta$$

ergiebt sich nämlich

$$\Phi(B) = \Phi(B_1) - \Omega \cot \Theta,$$

und man kann also mittelst dieser Formel $\Phi(B)$ leicht mit Hülfe der Tafel für $\Phi(\overline{\omega})$ berechnen. Geht man dann in diese Tafel mit dem bekannten $\Phi(B)$ ein, so kann man aus derselben das entsprechende B entnehmen. Da man nun B und B_1 hat, so ergiebt sich mit Hülfe der Tafel für $\Gamma(\overline{\omega})$ die gesuchte Grösse s nach der Formel

$$s = \{\Gamma(B_1) - \Gamma(B)\} \sec \Theta.$$

Weit beschwerlicher wird die Rechnung, wenn man keine Tafeln für $\Phi(\overline{\omega})$ und $\Gamma(\overline{\omega})$ besitzt, und man kann sich dann bloss durch eine Näherung helfen.

Betrachtet man nämlich zuerst das Ellipsoid näherungsweise als eine Kugel, oder setzt $e = 0$, so ist nach Kap. I. Nr. 57)

$$\Omega = \frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1'} l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)},$$

woraus leicht

$$l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B) = l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) - \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'$$

folgt, mittelst welcher Formel man einen ersten Näherungswerth B der gesuchten Breite, welche der kleineren Länge entspricht, finden kann.

Bezeichnen wir nun einen zweiten Näherungswerth der gesuchten Breite durch $B + \Delta B$, und gehen bloss bis auf Glieder, welche in Bezug auf e von der zweiten Ordnung sind, so ist nach Kap. I. Nr. 57)

$$\frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ l \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} (B + \Delta B))} + e^2 (\sin(B + \Delta B) - \sin B_1) \right\},$$

also nach dem Taylor'schen Lehrsatz, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, die in Bezug auf ΔB von der ersten Ordnung sind, und annimmt, dass ΔB in Minuten ausgedrückt ist:

$$\begin{aligned} & l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) - \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1' \\ &= l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B) + \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial B} \Delta B \cdot \text{Arc } 1' \\ &\quad - e^2 (\sin B - \sin B_1 + \frac{\partial \sin B}{\partial B} \Delta B \cdot \text{Arc } 1'), \end{aligned}$$

d. i., weil nach dem Vorhergehenden

$$l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1) - \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1' = l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)$$

ist:

$$\begin{aligned} & e^2 (\sin B - \sin B_1) \\ &= \left\{ \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial B} - e^2 \frac{\partial \sin B}{\partial B} \right\} \Delta B \cdot \text{Arc } 1'. \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial B} \\ &= \frac{\partial l \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \cdot \frac{\partial \tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial (45^\circ + \frac{1}{2} B)} \cdot \frac{\partial (45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial B} \\ &= \frac{1}{2} \cot(45^\circ + \frac{1}{2} B) \sec(45^\circ + \frac{1}{2} B)^2 \\ &= \frac{1}{2 \sin(45^\circ + \frac{1}{2} B) \cos(45^\circ + \frac{1}{2} B)} = \frac{1}{\sin(90^\circ + B)} \\ &= \frac{1}{\cos B} = \sec B, \end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial \sin B}{\partial B} = \cos B;$$

also

$$\frac{\partial l \operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\partial B} - e^2 \frac{\partial \sin B}{\partial B} \\ = \frac{1 - e^2 \cos B^2}{\cos B},$$

und folglich, weil

$$\sin B - \sin B_1 = 2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)$$

ist:

$$\Delta B = 2 e^2 \frac{\cos B \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)}{(1 - e^2 \cos B^2) \operatorname{Arc} 1'},$$

oder, weil

$$\frac{1}{1 - e^2 \cos B^2} = 1 + e^2 \cos B^2 + e^4 \cos B^4 + \dots$$

ist, mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Bezug auf e von der vierten Ordnung sind:

$$\Delta B = \frac{2 e^2 \cos B \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1)}{\operatorname{Arc} 1'}.$$

Mittelst dieser Formeln kann man die Correction ΔB berechnen, welche man dem vorher gefundenen ersten Näherungswerthe B der Breite, welche der kleineren Länge entspricht, noch beifügen muss, um einen zweiten Näherungswerth $B + \Delta B$ dieser Breite zu finden.

Hiernach wird es nun keine Schwierigkeit haben, die gesuchte Breite B so zu bestimmen, dass der Gleichung

$$\Omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{Arc} 1'} \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \right\}$$

oder der Gleichung

$$\Omega = \frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{Arc} 1'} \left\{ l \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \right. \\ \left. + \dots \dots \dots \right\}$$

vollständig genügt wird.

Nachdem man die der kleineren Länge entsprechende Breite B auf diese Weise gefunden hat, findet man die gesuchte Distanz s ganz wie in §. 25.

§. 30.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , die Längendifferenz Ω und die Distanz s gegeben sind: die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 und den Curs Θ zu finden.

Auflösung. Für die Kugel, welche wir zuerst betrachten wollen, d. h. für $e = 0$, haben wir, wenn s in Seemeilen ausgedrückt angenommen wird, die folgenden Gleichungen:

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} l \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B)}, \quad s = (B_1 - B) \sec \Theta.$$

In diesen Gleichungen sind die Grössen B , Ω , s bekannt, und man soll aus denselben die Grössen B_1 und Θ finden, was nur auf dem Wege der Elimination der einen dieser beiden Grössen möglich ist.

Geht man von dem Gesichtspunkte aus, die unbekannte Grösse B_1 zu eliminiren, so hat man aus der zweiten Gleichung

$$B_1 = B + s \cos \Theta,$$

welches, für B_1 in die erste Gleichung gesetzt, die Gleichung

$$\Omega \text{ Arc } 1' = \text{tang } \Theta l \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} s \cos \Theta)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B)},$$

welche nun bloss noch die eine unbekannte Grösse Θ enthält, giebt. Diese transcendente Gleichung kann aber bei dem gegenwärtigen Zustande der Mathematik bloss durch Versuche aufgelöst werden, wobei man Θ alle Werthe von 0° bis 180° durchlaufen lassen muss, um alle Auflösungen dieser Gleichung, die es möglicherweise geben kann, zu finden. Hat man aber Θ gefunden, so ergiebt sich B_1 mittelst der Formel

$$B_1 = B + s \cos \Theta.$$

Man könnte auch von dem Gesichtspunkte ausgehen, die unbekannte Grösse Θ zu eliminiren, was mittelst der bekannten gonio-metrischen Gleichung

$$\sec \Theta^2 = 1 + \text{tang } \Theta^2$$

keine Schwierigkeit hat; weil aber die Gleichung, welche man auf

diese Weise erhält, weitläufig ist, und doch zu keiner directen Auflösung unserer Aufgabe führt, so unterlassen wir die Ausführung der betreffenden Rechnung.

Am besten wird man immer eine der beiden folgenden Verfahrensarten anwenden.

Man lasse in bestimmten gleichen Intervallen Θ von 0° bis 180° wachsen, berechne die entsprechenden Werthe von B_1 mittelst der Formel

$$B_1 = B + s \cos \Theta,$$

und untersuche, welche Paare zusammengehörender Werthe von Θ und B_1 der Gleichung

$$\Omega \text{ Arc } 1' = \text{tang } \Theta l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}$$

am Genauesten genügen. Hat man auf diese Art zwei erste Näherungswerthe von Θ und B_1 gefunden, so werden sich dieselben dann durch einige Versuche leicht noch weiter corrigiren lassen, bis den beiden Gleichungen

$$B_1 = B + s \cos \Theta, \quad \Omega \text{ Arc } 1' = \text{tang } \Theta l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}$$

vollständig genügt wird.

Oder man lasse in bestimmten gleichen Intervallen B_1 von -90° bis $+90^\circ$ wachsen, berechne die entsprechenden Werthe von Θ mittelst der Formel

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s},$$

und untersuche, welche Paare zusammengehörender Werthe von B_1 und Θ der Gleichung

$$\Omega \text{ Arc } 1' = \text{tang } \Theta l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}$$

am Genauesten genügen. Hat man auf diese Art zwei erste Näherungswerthe von B_1 und Θ gefunden, so werden sich dieselben dann durch einige Versuche leicht noch weiter corrigiren lassen, bis den beiden Gleichungen

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s}, \quad \Omega \text{ Arc } 1' = \text{tang } \Theta l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}$$

vollständig genügt wird.

Sollte man zufällig schon eine genäherte Kenntniss von Θ oder B_1 besitzen, so wird man natürlich im ersten Falle die erste, im

zweiten Falle die zweite der beiden vorhergehenden Verfahrensarten mit dem grössten Vortheil in Anwendung bringen.

Hat man aber B_1 und Θ erst für die Kugel bestimmt, so wird es dann auch leicht sein, dieselben ferner so zu corrigiren, dass den beiden Gleichungen

$$\Omega \operatorname{Arc} 1' = \operatorname{tang} \Theta \left\{ \frac{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\operatorname{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + 2e^2 \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) \right\}$$

und

$$s \operatorname{Arc} 1' = (1 - e^2) \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \operatorname{Arc} 1' + \frac{3}{4} e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\},$$

wo wir der Kürze wegen bei Gliedern der zweiten Ordnung in den eingeklammerten Grössen stehen geblieben sind, vollständig genügt wird.

Natürlich kann man sich auch der Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$ bei der Auflösung dieser Aufgabe mit Vortheil bedienen, und hat sich dann auf folgende Art zu verhalten.

Zuerst betrachtet man die Erde als eine Kugel, und bedient sich also auch der diesem Falle entsprechenden Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$.

Entweder lässt man in bestimmten gleichen Intervallen Θ von 0° bis 180° wachsen, berechnet die entsprechenden Werthe von B_1 mittelst der Formel

$$B_1 = B + s \cos \Theta,$$

untersucht, welche Paare zusammengehörender Werthe von Θ und B_1 der Gleichung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \operatorname{tang} \Theta$$

am Genauesten genügen, und corrigirt dann die gefundenen Näherungswerthe von Θ und B_1 weiter, bis den beiden Gleichungen

$$B_1 = B + s \cos \Theta, \quad \Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \operatorname{tang} \Theta$$

vollständig genügt wird.

Oder man lässt in bestimmten gleichen Intervallen B_1 von -90° bis $+90^\circ$ wachsen, berechnet die entsprechenden Werthe von Θ mittelst der Formel

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s},$$

untersucht, welche Paare zusammengehörender Werth von B_1 und Θ der Gleichung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

am Genauesten genügen, und corrigirt dann die gefundenen Näherungswerthe von B_1 und Θ weiter, bis den beiden Gleichungen

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s}, \quad \Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

vollständig genügt wird.

Hat man aber nach der einen oder der anderen dieser beiden Methoden B_1 und Θ für die Kugel bestimmt, so wird man mittelst der dem Falle des Ellipsoids entsprechenden Tafeln von $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$ die beiden in Rede stehenden Näherungswerthe der gesuchten Grössen durch einige Versuche auch leicht noch weiter so corrigiren können, dass den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \Omega &= \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta, \\ s &= \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta \end{aligned}$$

in Bezug auf das Ellipsoid vollständig genügt wird.

Da übrigens die hier behandelte Aufgabe in der seemännischen Praxis nicht vorkommt, so wird das Vorhergehende vollständig genügen, um eine deutliche Einsicht in die Natur derselben zu gewinnen.

§. 31.

Aufgabe. Wenn die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 , die Längendifferenz Ω und die Distanz s gegeben sind: die der kleineren Länge entsprechende Breite B und den Curs Θ zu finden.

Auflösung. Da die Auflösung dieser, auch nicht in der nautischen Praxis zur Anwendung kommenden Aufgabe der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe in allen ihren Theilen vollständig ähnlich ist, so wird es hinreichend sein, nur ein Paar Worte in Bezug auf den Fall zu sagen, wenn man sich im Besitze der Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$ befindet.

Zuerst betrachtet man die Erde als eine Kugel, und bedient sich also auch der diesem Falle entsprechenden Tafeln von $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$.

Entweder lässt man dann unter dieser Voraussetzung in bestimmten gleichen Intervallen Θ von 0° bis 180° wachsen, berechnet die entsprechenden Werthe von B mittelst der Formel

$$B = B_1 - s \cos \Theta,$$

untersucht, welche Paare zusammengehörender Werthe von Θ und B der Gleichung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

am Genauesten genügen, und corrigirt dann die gefundenen Näherungswerthe von Θ und B weiter, bis den beiden Gleichungen

$$B = B_1 - s \cos \Theta, \quad \Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

vollständig genügt wird.

Oder man lässt in bestimmten gleichen Intervallen B von -90° bis $+90^\circ$ wachsen, berechnet die entsprechenden Werthe von Θ mittelst der Formel

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s},$$

untersucht, welche Paare zusammengehörender Werthe von B und Θ der Gleichung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

am Genauesten genügen, und corrigirt dann die gefundenen Näherungswerthe von B und Θ weiter, bis den beiden Gleichungen

$$\cos \Theta = \frac{B_1 - B}{s}, \quad \Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta$$

vollständig genügt wird.

Hat man aber nach der einen oder der anderen dieser beiden Methoden B und Θ für die Kugel bestimmt, so wird man mittelst der dem Falle des Ellipsoids entsprechenden Tafeln von $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$ die beiden in Rede stehenden Näherungswerthe der gesuchten Grössen durch einige Versuche auch leicht noch weiter so corrigiren können, dass den beiden Gleichungen

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta,$$

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta$$

in Bezug auf das Ellipsoid vollständig genügt wird.

§. 32.

Aufgabe. Wenn die der kleineren Länge entsprechende Breite B , der Curs Θ und die Distanz s gegeben sind: die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 und die Längendifferenz Ω zu finden.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, dass s in Seemeilen ausgedrückt sei, haben wir nach §. 25. zur Bestimmung von B_1 die Gleichung

$$s = \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4} e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\}$$

oder

$$s = \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' - \frac{3}{8} e^2 (\sin 2 B_1 - \sin 2 B) \right\},$$

welche nur durch Näherung aufgelöst werden kann.

Einen ersten Näherungswerth der gesuchten Breite findet man, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, also $e = 0$ setzt, d. h. mittelst der Gleichung

$$B_1 = B + s \cos \Theta.$$

Bezeichnet man nun einen zweiten Näherungswerth der gesuchten Breite durch $B_1 + \Delta B_1$, so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von ΔB_1 die Gleichung

$$s \cos \Theta = \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B + \Delta B_1) \text{Arc } 1' - \frac{3}{8} e^2 (\sin 2 (B_1 + \Delta B_1) - \sin 2 B) \right\},$$

also, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, die in Bezug auf ΔB_1 von der ersten Ordnung sind, und annimmt, dass ΔB_1 in Minuten ausgedrückt sei, was sich übrigens wegen der vorhergehenden Formel auch schon von selbst versteht:

$$s \cos \Theta = \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' - \frac{3}{4} e^2 \sin (B_1 - B) \cos (B_1 + B) \right\} + (1 - e^2) \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 (1 - \cos 2 B_1) \right\} \Delta B_1,$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$s \cos \Theta = B_1 - B$$

ist:

$$\frac{1}{4} e^2 \left\{ (1 + 3 e^2) (B_1 - B) + 3 (1 - e^2) \frac{\sin (B_1 - B) \cos (B_1 + B)}{\text{Arc } 1'} \right\} = (1 - e^2) (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B_1) \Delta B_1,$$

woraus

$$\Delta B_1 = \frac{1}{4} e^2 \cdot \frac{(1 + 3e^2)(B_1 - B) + 3(1 - e^2) \frac{\sin(B_1 - B) \cos(B_1 + B)}{\text{Arc } 1'}}{(1 - e^2)(1 + \frac{3}{2} e^2 \sin B_1^2)}$$

Vernachlässigt man in dieser Formel die Glieder, welche in Beziehung auf e von der vierten Ordnung sind, so ist, weil

$$\frac{1}{1 - e^2} = 1 + e^2 + e^4 + e^6 + \dots,$$

$$\frac{1}{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin B_1^2} = 1 - \frac{3}{4} e^2 \sin B_1^2 + \frac{9}{4} e^4 \sin B_1^4 - \dots$$

ist, offenbar

$$\Delta B_1 = \frac{1}{4} e^2 \left\{ B_1 - B + \frac{3 \sin(B_1 - B) \cos(B_1 + B)}{\text{Arc } 1'} \right\}.$$

Hat man B_1 gefunden, so ergibt sich die Längendifferenz Ω mittelst der Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \begin{aligned} & l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} \\ & - \frac{1}{2} e l \frac{1 - 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2e \sin \frac{1}{2}(B - B_1) \cos \frac{1}{2}(B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \end{aligned} \right\},$$

oder mittelst der Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \begin{aligned} & l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) \\ & + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \\ & + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \\ & + \dots \end{aligned} \right\}.$$

Sehr erleichtert wird die Auflösung dieser Aufgabe wieder durch die Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$.

Aus der Gleichung

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta$$

folgt nämlich

$$\Gamma(B_1) = \Gamma(B) + s \cos \Theta,$$

mittelst welcher Formel man leicht $\Gamma(B_1)$ findet, indem man $\Gamma(B)$ aus der Tafel für $\Gamma(\bar{\omega})$ nimmt. Geht man dann mit $\Gamma(B_1)$ in die Tafel für $\bar{\Gamma}(\bar{\omega})$ ein, so kann man aus derselben das entsprechende

B_1 entnehmen. Hat man aber B_1 , so erhält man ferner Ω mittelst der Formel

$$\Omega = \{\Phi(B_1) - \Phi(B)\} \tan \Theta,$$

wo man $\Phi(B)$ und $\Phi(B_1)$ aus der Tafel für $\Phi(\bar{\omega})$ nimmt.

§. 33.

Aufgabe. Wenn die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 , der Curs Θ und die Distanz s gegeben sind: die der kleineren Länge entsprechende Breite B und die Längendifferenz Ω zu finden.

Auflösung. Unter der Voraussetzung, dass s in Seemeilen ausgedrückt sei, haben wir nach §. 25. zur Bestimmung von B die Gleichung

$$s =$$

$$\frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4} e^2 \sin(B - B_1) \cos(B + B_1) \right\}$$

oder

$$s =$$

$$\frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \Theta \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{8} e^2 (\sin 2B - \sin 2B_1) \right\},$$

welche nur durch Näherung aufgelöst werden kann.

Einen ersten Näherungswerth der gesuchten Breite findet man, wenn man die Erde als eine Kugel betrachtet, also $e = 0$ setzt, d. h. mittelst der Gleichung

$$B = B_1 - s \cos \Theta.$$

Bezeichnet man nun einen zweiten Näherungswerth der gesuchten Breite durch $B + \Delta B$, so hat man nach dem Obigen zur Bestimmung von ΔB die Gleichung

$$s \cos \Theta =$$

$$\frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B - \Delta B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{8} e^2 (\sin 2(B + \Delta B) - \sin 2B_1) \right\},$$

also, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, welche in Bezug auf ΔB von der ersten Ordnung sind, und annimmt, dass ΔB in Minuten ausgedrückt sei, was sich übrigens wegen der vorhergehenden Formel auch schon von selbst versteht:

$$= \frac{1 - e^2}{\text{Arc } 1'} \left\{ (1 + \frac{3}{4} e^2) (B_1 - B) \text{Arc } 1' + \frac{3}{4} e^2 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1) \right\} \\ - (1 - e^2) \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^2 (1 - \cos 2 B) \right\} \Delta B,$$

also, weil nach dem Vorhergehenden

$$s \cos \Theta = B_1 - B$$

ist:

$$- \frac{1}{4} e^2 \left\{ (1 + 3 e^2) (B_1 - B) - 3 (1 - e^2) \frac{\sin (B - B_1) \cos (B + B_1)}{\text{Arc } 1'} \right\} \\ = (1 - e^2) (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin B^2) \Delta B,$$

woraus

$$\Delta B = \frac{1}{4} e^2 \frac{(1 + 3 e^2) (B - B_1) + 3 (1 - e^2) \frac{\sin (B - B_1) \cos (B + B_1)}{\text{Arc } 1'}}{(1 - e^2) (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin B^2)}.$$

Vernachlässigt man in dieser Formel die Glieder, welche in Beziehung auf e von der vierten Ordnung sind, so ist, weil

$$\frac{1}{1 - e^2} = 1 + e^2 + e^4 + e^6 + \dots, \\ \frac{1}{1 + \frac{3}{2} e^2 \sin B^2} = 1 - \frac{3}{2} e^2 \sin B^2 + \frac{9}{4} e^4 \sin B^4 - \dots$$

ist, offenbar

$$\Delta B = \frac{1}{4} e^2 \left\{ B - B_1 + \frac{3 \sin (B - B_1) \cos (B + B_1)}{\text{Arc } 1'} \right\}.$$

Hat man B gefunden, so ergibt sich die Längendifferenz Ω mittelst der Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B)} - \frac{1}{2} e \frac{1 - 2 e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1}{1 + 2 e \sin \frac{1}{2} (B - B_1) \cos \frac{1}{2} (B + B_1) - e^2 \sin B \sin B_1} \right\},$$

oder mittelst der Formel

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} \left\{ \frac{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang } (45^\circ + \frac{1}{2} B)} + e^2 (\sin B - \sin B_1) \right. \\ \left. + \frac{1}{3} e^4 (\sin B^3 - \sin B_1^3) \right. \\ \left. + \frac{1}{5} e^6 (\sin B^5 - \sin B_1^5) \right. \\ \left. + \dots \right\}.$$

Sehr erleichtert wird auch die Auflösung dieser Aufgabe durch die Tafeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$.

Aus der Gleichung

$$s = \{ \Gamma(B_1) - \Gamma(B) \} \sec \Theta$$

folgt nämlich

$$\Gamma(B) = \Gamma(B_1) - s \cos \Theta,$$

mittelst welcher Formel man leicht $\Gamma(B)$ findet, indem man $\Gamma(B_1)$ aus der Tafel für $\Gamma(\bar{\omega})$ nimmt. Geht man dann mit $\Gamma(B)$ in die Tafel für $\Gamma(\bar{\omega})$ ein, so kann man aus derselben das entsprechende B entnehmen. Hat man aber B , so erhält man ferner Ω mittelst der Formel

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \tan \Theta,$$

wo $\Phi(B)$ und $\Phi(B_1)$ aus der Tafel für $\Phi(\bar{\omega})$ genommen werden.

§. 34.

Aufgabe. Wenn die Längendifferenz Ω , der Curs Θ und die Distanz s gegeben sind: die der kleineren Länge entsprechende Breite B , und die der grösseren Länge entsprechende Breite B_1 zu finden.

Auflösung. Betrachten wir als eine erste Näherung die Erde als eine Kugel und setzen demzufolge $e = 0$, so sind die beiden Gleichungen, aus denen die gesuchten Breiten B und B_1 bestimmt werden müssen, wenn wir s in Seemeilen ausgedrückt annehmen:

$$\Omega = \frac{\tan \Theta}{\text{Arc } 1'} \cdot \frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)}, \quad s = (B_1 - B) \sec \Theta;$$

also ist

$$B_1 = B + s \cos \Theta,$$

und folglich wegen der ersten Gleichung

$$\frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} s \cos \Theta)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} = \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'.$$

Bezeichnen wir nun die Basis der natürlichen Logarithmen durch E , so ist

$$\frac{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} s \cos \Theta)}{\tan(45^\circ + \frac{1}{2} B)} = E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'},$$

also

$$\frac{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} - 1}{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} + 1} = \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) - \text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) + \text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)},$$

d. i.

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta)}{\sin(90^\circ + B + \frac{1}{2} s \cos \Theta)} = \frac{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} - 1}{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} + 1},$$

oder

$$\frac{\sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta)}{\cos(B + \frac{1}{2} s \cos \Theta)} = \frac{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} - 1}{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} + 1},$$

und folglich

$$\cos(B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) = \frac{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} + 1}{E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'} - 1} \sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta).$$

Berechnet man den Hülfswinkel φ mittelst der Formel

$$\text{tang } \varphi = E^{\Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1'},$$

d. h. mittelst der Formel

$$l \text{ tang } \varphi = \Omega \cot \Theta \cdot \text{Arc } 1',$$

was nicht die mindeste Schwierigkeit hat, so ist

$$\cos(B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) = - \frac{1 + \text{tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi} \sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta),$$

d. i.

$$\cos(B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) = - \sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta) \text{tang}(45^\circ + \varphi)$$

oder

$$\cos(B + \frac{1}{2} s \cos \Theta) = - \sin(\frac{1}{2} s \cos \Theta) \cot(45^\circ - \varphi).$$

Ueber die Zweidentigkeit, welche bei der Bestimmung von B mittelst dieser Formel allerdings noch bleiben kann, wird sich bei praktischen Anwendungen gewiss aus den besondern Umständen des vorliegenden Falls immer leicht entscheiden lassen, weshalb ich darüber noch besondere Erläuterungen hier beizufügen nicht für nöthig halte.

Hat man aber B auf diese Weise bestimmt, so ergiebt sich ferner B_1 mittelst der Formel

$$B_1 = B + s \cos \Theta.$$

Man könnte auch auf ganz ähnliche Art wie vorher zuerst B_1 suchen, und dann mittelst der Formel

$$B = B_1 - s \cos \Theta$$

ferner B bestimmen, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

Hat man auf diese Weise erste Näherungswerthe B und B_1 der beiden Breiten gefunden, so seien ΔB und ΔB_1 die denselben noch beizufügenden Correctionen, und folglich $B + \Delta B$ und $B_1 + \Delta B_1$ die genauen Breiten auf dem Ellipsoid. Dann hat man die Gleichungen

$$\Omega = \{ \Phi(B_1 + \Delta B_1) - \Phi(B + \Delta B) \} \tan \Theta,$$

$$s = \{ \Gamma(B_1 + \Delta B_1) - \Gamma(B + \Delta B) \} \sec \Theta;$$

folglich nach dem Taylor'schen Lehrsatz, wenn man bei Gliedern stehen bleibt, die in Bezug auf ΔB und ΔB_1 von der ersten Ordnung sind:

$$\frac{\partial \Phi(B)}{\partial B} \Delta B - \frac{\partial \Phi(B_1)}{\partial B_1} \Delta B_1 = \Phi(B_1) - \Phi(B) - \Omega \cot \Theta,$$

$$\frac{\partial \Gamma(B)}{\partial B} \Delta B - \frac{\partial \Gamma(B_1)}{\partial B_1} \Delta B_1 = \Gamma(B_1) - \Gamma(B) - s \cos \Theta.$$

Die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi(B)}{\partial B}, \quad \frac{\partial \Phi(B_1)}{\partial B_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Gamma(B)}{\partial B}, \quad \frac{\partial \Gamma(B_1)}{\partial B_1}$$

wird man aber leicht näherungsweise aus den aus dem Obigen bekannten Formeln für $\Phi(\bar{\omega})$ und $\Gamma(\bar{\omega})$, oder auch aus den Tafeln für diese Grössen, wenn man im Besitz solcher Tafeln ist, berechnen können, und hat dann nach dem Obigen zwischen ΔB und ΔB_1 zwei Gleichungen des ersten Grades, mittelst welcher ΔB und ΔB_1 ohne Schwierigkeit bestimmt, und also auch die verbesserten Breiten $B + \Delta B$ und $B_1 + \Delta B_1$ gefunden werden können, was einer weiteren Erläuterung nicht bedürfen wird. Eben so wenig ist es nöthig, noch besonders darauf hinzuweisen, wie man sich dieser Methode zu der sogenannten successiven Annäherung zu bedienen hat. Bemerken wollen wir aber noch, dass, weil bekanntlich

$$\Phi(\bar{\omega}) = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{\cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

$$\Gamma(\bar{\omega}) = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \int_0^{\bar{\omega}} \frac{\partial \bar{\omega}}{(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, allgemein

$$\frac{\partial \Phi(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \cdot \frac{1}{\cos \bar{\omega} (1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)},$$

$$\frac{\partial \Gamma(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \cdot \frac{1}{(1 - e^2 \sin \bar{\omega}^2)^{\frac{3}{2}}};$$

oder

$$\frac{\partial \Phi(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} \sec \bar{\omega} (1 + e^2 \sin \bar{\omega}^2 + e^4 \sin \bar{\omega}^4 + \dots),$$

$$\frac{\partial \Gamma(\bar{\omega})}{\partial \bar{\omega}} = \frac{1-e^2}{\text{Arc } 1'} (1 + \frac{3}{2} e^2 \sin \bar{\omega}^2 + \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4} e^4 \sin \bar{\omega}^4 + \dots)$$

ist, welcher Formeln man sich daher bei der Berechnung der Differentialquotienten

$$\frac{\partial \Phi(B)}{\partial B}, \quad \frac{\partial \Phi(B_1)}{\partial B_1} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Gamma(B)}{\partial B}, \quad \frac{\partial \Gamma(B_1)}{\partial B_1}$$

bedienen kann.

§. 35.

Wir haben im Vorhergehenden, der einfacheren Darstellung der Formeln wegen, in denselben überall die natürlichen Logarithmen beibehalten, wollen nun aber noch die numerischen Constanten angeben, welche man kennen muss, wenn es darauf ankommt, natürliche Logarithmen in gemeine oder briggische Logarithmen, oder umgekehrt gemeine oder briggische Logarithmen in natürliche Logarithmen zu verwandeln.

Wenn nämlich natürliche Logarithmen wie gewöhnlich durch l , gemeine oder briggische Logarithmen durch $\log$ bezeichnet werden, und M der Modulus des gemeinen oder briggischen Systems ist, so ist bekanntlich allgemein

$$\log N = M l N, \quad l N = \frac{1}{M} \log N$$

und man braucht daher, um die in Rede stehenden Verwandlungen vornehmen zu können, bloss die beiden numerischen Constanten M und $\frac{1}{M}$ zu kennen, welche wir deshalb jetzt angeben wollen.

Die Werthe der Constanten M und $\frac{1}{M}$ nebst ihren Vielfachen bis zum Neunfachen sind:

	M
1	0,434294481903
2	0,868588963807
3	1,302883445710
4	1,737177927613
5	2,171472409516
6	2,605766891420
7	3,040061373323
8	3,474355855226
9	3,908650337129

	$\frac{1}{M}$
1	2,302585092994
2	4,605170185988
3	6,907755278982
4	9,210340371976
5	11,512925464970
6	13,815510557964
7	16,118095650958
8	18,420680743952
9	20,723265836946

Auch ist

$$\log M = 0,6377843113 - 1$$

$$\log \frac{1}{M} = 0,3622156886$$

Drittes Kapitel.

Von den Seekarten mit wachsenden Breiten.

§. 36.

Die Seekarten mit wachsenden Breiten *) sind ein treffliches Hilfsmittel für den Seemann, die für den praktischen Gebrauch wichtigsten Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie durch Construction oder graphisch zu lösen, was namentlich auf der See, wo nicht immer die nöthige Ruhe zum Rechnen vorhanden ist, von grosser Wichtigkeit ist. Die Gründe, auf denen die Zeichnung der Seekarten mit wachsenden Breiten beruhet, sind im Vorhergehenden enthalten, weshalb wir nun noch in diesem Kapitel das Wichtigste über diese Karten und ihren Gebrauch beibringen wollen, wobei wir uns aber auf die Kugel beschränken werden, weil der praktische Gebrauch der Seekarten mit wachsenden Breiten in mehreren Fällen wesentlich an Einfachheit verlieren würde, wenn man bei der Construction derselben die sphäroidische Gestalt der Erde berücksichtigen wollte, was übrigens an sich sehr leicht möglich sein würde, wie sich aus dem Folgenden von selbst ergeben wird. Von jetzt an betrachten wir daher die Erde stets als eine Kugel.

§. 37.

Für die Kugel hat man bekanntlich die beiden Formeln

*) Anwachsende Seekarten. Reducirte Seekarten (cartes réduites). Mercators Seekarten. Runde Seekarten.

$$\Omega = \frac{\text{tang } \Theta}{\text{Arc } 1'} l \frac{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B_1)}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} B)}, s = (B_1 - B) \sec \Theta$$

oder kürzer in der im vorhergehenden Kapitel eingeführten Bezeichnung

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \text{tang } \Theta, s = (B_1 - B) \sec \Theta$$

welche als Grundformeln für das Folgende zu betrachten sind.

Man ziehe nun auf einer Ebene zwei auf einander senkrecht stehende gerade Linien als Coordinatenaxen, eine horizontale und eine vertikale, von denen die erste die Längenaxe, die zweite die Breitenaxe genannt werden soll, bezeichne deren Durchschnittspunkt mit 0, und nehme daher an, dass die Längenaxe den Aequator, die Breitenaxe den ersten Meridian vorstellen soll, wobei wir jetzt zugleich annehmen wollen, dass die Längen nicht wie bisher von 0° bis 360° gezählt, sondern nur von 0° bis 180° genommen, und östliche und westliche Längen von einander unterschieden werden sollen, was in der Nautik allgemein gebräuchlich ist, so wie auch in derselben die Breiten, welche wir bisher positive und negative Breiten genannt haben, respective nördliche und südliche Breiten genannt zu werden pflegen.

Auf die Längenaxe trage man von 0 an nach beiden Seiten hin $180.60 = 10800$ gleiche Theile, oder denke sich wenigstens, wenn man auch in der Wirklichkeit nur grössere Theile aufträgt, die Längenaxe vom Nullpunkte an nach beiden Seiten hin in so viele gleiche Theile getheilt, und nehme die auf diese Weise hervorgehende Scale, indem man jeden Theil derselben eine Seemeile bedeuten lässt, als den eigentlichen Maassstab der ganzen Karte an. Auf die Breitenaxe trage man aber hierauf nach diesem Maassstabe von 0 an die Werthe der Function $\Phi(\bar{\omega})$, aufwärts von $\bar{\omega} = 0^\circ$ bis $\bar{\omega} = + 90^\circ = + 5400'$, abwärts von $\bar{\omega} = 0^\circ$ bis $\bar{\omega} = - 90^\circ = - 5400'$ auf, wobei eine Minute bekanntlich als identisch mit einer Seemeile zu betrachten ist, und erinnere sich bei dieser Operation, dass, weil allgemein

$$\Phi(+\bar{\omega}) = \frac{l \text{ tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega})}{\text{Arc } 1'}, \Phi(-\bar{\omega}) = \frac{l \text{ tang}(45^\circ - \frac{1}{2} \bar{\omega})}{\text{Arc } 1'}$$

und

$$\text{tang}(45^\circ - \frac{1}{2} \bar{\omega}) = \cot(45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega}) = \frac{1}{\text{tang}(45^\circ + \frac{1}{2} \bar{\omega})}$$

ist, offenbar allgemein

$$\Phi(-\bar{\omega}) = - \Phi(+\bar{\omega})$$

ist. Die Werthe von $\Phi(\omega)$ nimmt man aus der schon vorher berechneten Tafel der Meridionaltheile (§. 25.), bedient sich aber, wie schon erinnert worden ist, bei dem Auftragen immer der auf die Längenaxe aufgetragenen Scale der Seemeilen als Maassstab. An die einzelnen Theilpunkte der Längenaxe werden die Zahlen

10800, 10799, 10798, ... 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, ... 10798, 10799, 10800
an die einzelnen Theilpunkte der Breitenaxe die Zahlen

5400
5399
5398
:
3
2
1
0
1
2
3
:
5398
5399
5400

geschrieben oder wenigstens geschrieben gedacht.

Soll nun ein beliebiger durch seine Länge und Breite bestimmter Ort der Erdoberfläche in die Karte eingetragen werden, so sucht man die der gegebenen Länge und Breite entsprechenden Punkte der Längenaxe und der Breitenaxe auf, auf jeder der beiden Axen nach der auf sie nach der vorhergehenden Anweisung aufgetragenen Scale, und zieht durch die beiden in Rede stehenden Punkte der Längenaxe und der Breitenaxe respective mit der Breitenaxe und mit der Längenaxe eine Parallellinie, wo denn durch den Durchschnittspunkt dieser beiden Parallelen jederzeit der in die Karte einzutragende Ort der Erdoberfläche auf der Karte bestimmt, und dieser Durchschnittspunkt daher mit dem Namen des einzutragenden Orts bezeichnet wird.

Uebrigens ist es nicht unbedingt nöthig, den Aequator als Längenaxe und den ersten Meridian als Breitenaxe anzunehmen; man kann vielmehr jeden beliebigen Parallelkreis als Längenaxe, jeden beliebigen Meridian als Breitenaxe annehmen, und muss dann nur an

die Stelle der wirklichen Längen und Breiten der einzutragenden Punkte deren Längendifferenzen und Breitendifferenzen in Bezug auf den als Längenaxe zum Grunde gelegten Parallelkreis und den als Breitenaxe zum Grunde gelegten Meridian setzen, bei der Verzeichnung der Scale auf der Breitenaxe sich aber immer der Tafel der Meridionaltheile bedienen, und die Breitendifferenzen aus derselben stets so entnehmen, dass sie der wirklichen Breite des als Längenaxe zum Grunde gelegten Parallelkreises und den wirklichen Breiten der einzutragenden Punkte gehörig entsprechen, was leicht ohne weitere Erläuterung verständlich sein wird. Bei der Verzeichnung von Seekarten, die nur einzelne Theile der Erdoberfläche darstellen, wird der hier betrachtete Fall immer vorkommen.

Praktische Vortheile bei der Verzeichnung der Seekarten mit wachsenden Breiten nach den vorhergehenden allgemeinen Vorschriften werden sich einem Jeden, wer mit solchen graphischen Operationen nur einigermaßen vertraut ist, von selbst darbieten, weshalb darüber an diesem Orte nichts weiter gesagt zu werden braucht.

Gewöhnlich wird auf den Seekarten um einen schicklichen Punkt herum auch eine Windrose zur Angabe der Compassstriche verzeichnet, was für den praktischen Gebrauch auf der See ganz zweckmässig ist und besondere Vortheile darbietet.

Die erste Seekarte mit wachsenden Breiten gab Gerhard Mercator, ein berühmter niederländischer Geograph, im Jahre 1550 heraus, die Theorie und Verzeichnungsart solcher Karten stellte aber der Engländer Eduard Wrigth in einer besondern Schrift dar, welche unter dem Titel: *Certain errors in navigation detected and corrected* im Jahre 1657 zu London in einer zweiten Auflage erschien, und beleuchtete in derselben zugleich die Fehler der früheren Plankarten oder Plattkarten (*cartes planes*), deren sich die Seefahrer vor der Einführung der Karten mit wachsenden Breiten bedienten, und bei kleinen Seereisen auch jetzt wohl noch theilweise bedienen. Obgleich die Plankarten schon von Ptolemäus in seiner Geographie als fehlerhaft verworfen worden sind, so hat sie doch der portugiesische Prinz Heinrich (1420), der die Insel Madeira entdeckte und den Weg nach Ostindien bahnte, in der Nautik nützlich gefunden und zum Gebrauche bei kleinen Seereisen empfohlen.

§. 38.

Der Gebrauch der Seekarten mit wachsenden Breiten zur graphischen Auflösung der Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie gründet sich auf eine Construction, welche wir im Folgenden zuerst ganz im Allgemeinen darstellen wollen, bevor wir zur graphischen Auflösung einiger der wichtigsten Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie selbst übergehen.

Man denke sich auf der Karte zwei beliebige Punkte A und A_1 , deren gehörig als positiv oder negativ, oder als nördlich oder südlich, betrachtete Breiten respective B und B_1 sein mögen, und deren Längendifferenz wir durch Ω bezeichnen wollen. Diese beiden Punkte verbinde man auf der Karte durch die gerade Linie AA_1 mit einander, ziehe durch jeden der beiden Punkte eine der Breitenaxe parallele gerade Linie, und durch einen derselben, etwa durch den Punkt A_1 , eine der Längenaxe parallele gerade Linie, welche die durch den Punkt A der Breitenaxe parallel gezogene gerade Linie in dem Punkte A' schneiden mag; so erhält man auf der Karte das bei A' rechtwinklige Dreieck $AA'A_1$, in welchem AA_1 die Hypotenuse, $A'A_1$ die der Spitze A gegenüberstehende Kathete, und AA' die der Spitze A_1 gegenüberstehende Kathete ist. Hierauf messe man die absolut genommene Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 auf der Längenaxe ab, d. h. man nehme so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, als die absolut genommene Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 Minuten oder, was bekanntlich dasselbe ist, Seemeilen enthält, und schneide von dem Punkte A aus auf der Kathete AA' des rechtwinkligen Dreiecks $AA'A_1$ eine der Entfernung der beiden Zirkelspitzen von einander gleiche Länge ab, wodurch auf der in Rede stehenden Kathete AA' der Punkt a' bestimmt werden mag, durch welchen man nun eine der Längenaxe parallele gerade Linie zieht, welche die Hypotenuse AA_1 des rechtwinkligen Dreiecks $AA'A_1$ in dem Punkte a_1 schneiden soll, wodurch man ein zweites bei a' rechtwinkliges Dreieck $Aa'a_1$ erhält, dessen Hypotenuse Aa_1 ist, und dessen den Spitzen A und a_1 gegenüberstehende Katheten $a'a_1$ und Aa' sind. Die Bedeutung der einzelnen Stücke der beiden rechtwinkligen Dreiecke $AA'A_1$ und $Aa'a_1$, so weit dieselben für unseren Zweck nöthig sind, wollen wir nun im Folgenden betrachten.

Die der Spitze A des rechtwinkligen Dreiecks $AA'A_1$ gegenüberstehende Kathete $A'A_1$ dieses Dreiecks, in Scalentheilen der

Längenaxe gemessen, ist offenbar die Längendifferenz der beiden Punkte A und A_1 .

Die der Spitze A_1 des rechtwinkligen Dreiecks $AA'A_1$ gegenüberstehende Kathete AA' dieses rechtwinkligen Dreiecks, in den zwischen den beiden durch die Punkte A und A_1 mit der Längenaxe parallel gezogenen geraden Linien liegenden (nicht unter einander gleichen) Scalentheilen der Breitenaxe gemessen, ist der absolut genommene Breitenunterschied der beiden Punkte A und A_1 .

In dem rechtwinkligen Dreiecke $AA'A_1$ ist ferner

$$A'A_1 = AA' \cdot \text{tang } A'AA_1,$$

also, weil nach dem Vorhergehenden $A'A_1 = \Omega$ ist,

$$\Omega = AA' \cdot \text{tang } A'AA_1.$$

Nehmen wir nun an, dass die Längen, wenn wir sie immer nach derselben Richtung hin von 0° bis 360° zählen, einer gegebenen Bestimmung zufolge, in der Richtung von der durch den Punkt A mit der Breitenaxe gezogenen Parallele nach der durch den Punkt A_1 mit der Breitenaxe gezogenen Parallele hin gezählt werden müssen, was uns offenbar verstattet ist, so ist bekanntlich in völliger Allgemeinheit

$$\Omega = \{ \Phi(B_1) - \Phi(B) \} \text{tang } \Theta.$$

Ist aber der Punkt A_1 derjenige von den beiden Punkten A und A_1 , welcher die grössere Breite hat, so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen gelehrtten Construction der Karte ganz von selbst folgt, in völliger Allgemeinheit

$$AA' = \Phi(B_1) - \Phi(B),$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Omega = AA' \cdot \text{tang } \Theta,$$

welche Gleichung, mit der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\Omega = AA' \cdot \text{tang } A'AA_1$$

verglichen, zu der Gleichung

$$\text{tang } A'AA_1 = \text{tang } \Theta,$$

also, weil keiner der beiden Winkel $A'AA_1$ und Θ grösser als 180° ist, zu der Gleichung

$$\angle A'AA_1 = \Theta$$

führt, so dass also für das den beiden Punkten A und A_1 ent-

sprechende loxodromische Dreieck der spitze Winkel $A'AA_1$ der Curs ist.

Wenn dagegen A_1 derjenige der beiden Punkte A und A_1 ist, welcher die kleinere Breite hat, so ist, wie aus der im vorhergehenden Paragraphen gelehrt Construction der Karten ganz von selbst folgt, in völliger Allgemeinheit

$$AA' = \Phi(B) - \Phi(B_1),$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\Omega = - AA' \cdot \text{tang } \Theta,$$

welche Gleichung, mit der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$\Omega = AA' \cdot \text{tang } A'AA_1 = - AA' \cdot \text{tang } (180^\circ - A'AA_1)$$

verglichen, zu der Gleichung

$$\text{tang } (180^\circ - A'AA_1) = \text{tang } \Theta,$$

also, weil keiner der beiden Winkel $180^\circ - A'AA_1$ und Θ grösser als 180° ist, zu der Gleichung

$$180^\circ - \angle A'AA_1 = \Theta$$

führt, so dass also für das den beiden Punkten A und A_1 entsprechende loxodromische Dreieck der stumpfe Nebenwinkel des spitzen Winkels $A'AA_1$ der Curs ist; wobei wir immer den Sinn festhalten, in welchem wir dieses Wort im Obigen stets genommen haben.

In dem rechtwinkligen Dreiecke $Aa'a_1$ ist ferner

$$Aa_1 = Aa' \cdot \sec a'Aa_1,$$

oder, was dasselbe ist,

$$Aa_1 = Aa' \cdot \sec A'AA_1.$$

Ist nun A_1 derjenige der beiden Punkte A und A_1 , welcher die grössere Breite hat, so ist nach der Construction, durch welche vorher der Punkt a' bestimmt worden ist, offenbar

$$Aa' = B_1 - B,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$Aa_1 = (B_1 - B) \sec A'AA_1.$$

Nun ist aber in diesem Falle nach dem Vorhergehenden

$$\angle A'AA_1 = \Theta, \sec A'AA_1 = \sec \Theta;$$

also

$$Aa_1 = (B_1 - B) \sec \Theta.$$

Wenn A_1 derjenige der beiden Punkte A und A_1 ist, welcher

die kleinere Breite hat, so ist nach der Construction, durch welche vorher der Punkt a' bestimmt worden ist, offenbar

$$Aa' = B - B_1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$Aa_1 = - (B_1 - B) \sec A'AA_1.$$

Nun ist aber in diesem Falle nach dem Vorhergehenden

$$\angle A'AA_1 = 180^\circ - \Theta, \quad \sec A'AA_1 = - \sec \Theta;$$

also

$$Aa_1 = (B_1 - B) \sec \Theta.$$

Daher ist allgemein

$$Aa_1 = (B_1 - B) \sec \Theta,$$

und folglich, weil bekanntlich allgemein

$$s = (B_1 - B) \sec \Theta$$

ist, $Aa_1 = s$. Also ist in dem auf die im Obigen gelehrt Weise construirten, bei a' rechtwinkligen Dreiecke $Aa'a_1$ die Hypotenuse Aa_1 , wenn man dieselbe auf der Längenaxe mit der auf dieselbe aufgetragenen Scale misst, die Distanz der beiden Punkte A und A_1 von einander in dem diesen beiden Punkten entsprechenden loxodromischen Dreiecke.

Welchen Gebrauch man nun von dieser vorher im Allgemeinen gelehrt Construction zur graphischen Auflösung einiger Aufgaben der loxodromischen Trigonometrie mit Hülfe der anwachsenden Seekarten machen kann, soll jetzt im Folgenden gezeigt werden. Dabei werden wir das Wort Curs immer in dem im Vorhergehenden stets festgehaltenen Sinne nehmen, und daher auch jederzeit voraussetzen, dass die Längen, wenn man sie immer nach derselben Richtung hin von 0° bis 360° zählte, in der Richtung von der durch den Punkt A mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie nach der durch den Punkt A_1 mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie hin genommen werden müssten, so dass also hiernach der Punkt A_1 immer als derjenige angesehen würde, welcher von den beiden Punkten A und A_1 die grössere Länge hat. Die nothwendige wissenschaftliche Bestimmtheit fordert diese oder ähnliche Voraussetzungen, wenn man dem Worte Curs einen vollständig bestimmten und allgemein gültigen geometrischen Begriff beilegen will, und in der Praxis wird es auch keine Schwierigkeit haben, sich mit demselben vollständig bekannt zu machen und ihn zu praktischen Zwecken richtig anzuwenden. Beweise der Richtig-

keit der Auflösungen der folgenden Aufgaben zu geben werden wir unterlassen, weil alle diese Auflösungen eigentlich nur wiederholte Anwendungen der vorhergehenden allgemeinen Construction sind. Annehmen werden wir immer, dass die Punkte A und A_1 auf der Karte gegeben sind oder auf derselben gesucht werden, wollen aber immer bei den einzelnen Aufgaben die Paragraphen angeben, in denen die entsprechenden Aufgaben im vorhergehenden Kapitel durch Rechnung gelöst worden sind.

§. 39.

Aufgabe. Wenn die Punkte A und A_1 gegeben sind: den Curs und die Distanz zu finden. (§. 25.).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt A ziehe man eine der Breitenaxe parallele gerade Linie und verbinde denselben mit dem gegebenen Punkte A_1 durch die gerade Linie AA_1 , so ist der spitze oder stumpfe Winkel, welchen diese gerade Linie mit demjenigen der beiden Theile, in welche die durch den Punkt A der Breitenaxe parallel gezogene gerade Linie durch den Punkt A getheilt wird, der von A aus nach Norden hin liegt, einschliesst, der gesuchte Curs. Hierauf ziehe man durch die beiden gegebenen Punkte A und A_1 Parallelen mit der Längenaxe, so ist die Anzahl der zwischen diesen beiden Parallelen liegenden Scalentheile der Breitenaxe die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 . Nun nehme man so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die Breitendifferenz Minuten oder Scalentheile der Breitenaxe enthält, trage die dadurch erhaltene Linie von dem Punkte A aus auf der durch denselben mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie ab, und ziehe durch den Endpunkt des abgetragenen Stücks mit der Längenaxe eine Parallele, bis von derselben die Linie AA_1 in einem gewissen Punkte geschnitten wird; dann ist die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung dieses Durchschnittspunktes von dem Punkte A die gesuchte Distanz. Dass man übrigens bei dieser Construction der Distanz statt des Punktes A sich auch des Punktes A_1 bedienen könnte, erhellet leicht.

§. 40.

Aufgabe. Wenn der Punkt A oder A_1 , die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 , und der Curs

gegeben sind: den Punkt A_1 oder den Punkt A , die Längendifferenz und die Distanz zu finden. (§. 26.).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt A oder durch den gegebenen Punkt A_1 ziehe man eine der Längenaxe und eine der Breitenaxe parallele gerade Linie. Von dem Durchschnittspunkte der ersteren mit der Breitenaxe an zähle man so viele Scalentheile der Breitenaxe ab, als die gegebene Breitendifferenz Minuten enthält, nach Norden oder nach Süden hin, jenachdem die Breite des gesuchten Punktes grösser oder kleiner als die Breite des gegebenen Punktes ist, ziehe durch den Endpunkt der abgezählten Scalentheile mit der Längenaxe eine Parallele, trage den gegebenen Curs in dem gegebenen Punkte an die durch denselben mit der Breitenaxe parallel gezogene gerade Linie auf dem allgemeinen Begriffe des Curses gehörig entsprechende Weise an, und bestimme den Durchschnittspunkt der auf diese Weise erhaltenen geraden Linie mit der vorher der Längenaxe parallel gezogenen geraden Linie, so ist dieser Durchschnittspunkt der gesuchte Punkt A_1 oder A . Zieht man nun auch durch den auf diese Weise gefundenen Punkt eine der Breitenaxe parallele gerade Linie, so ist die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung der beiden durch die Punkte A und A_1 mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linien von einander die gesuchte Längendifferenz der beiden Punkte A und A_1 . Endlich nehme man so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die gegebene Breitendifferenz der Punkte A und A_1 Minuten enthält, trage die dadurch erhaltene Linie von dem Punkte A aus auf der durch denselben mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie auf, ziehe durch den Endpunkt des aufgetragenen Stücks eine der Längenaxe parallele gerade Linie, und bestimme den Durchschnittspunkt dieser Parallele mit der Linie AA_1 , so ist die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung dieses Durchschnittspunktes von dem Punkte A die gesuchte Distanz. Dass man sich übrigens bei dieser Construction der Distanz statt des Punktes A auch des Punktes A_1 bedienen könnte, fällt leicht in die Augen.

§. 41.

Aufgabe. Wenn der Punkt A oder A_1 , die Breitendifferenz der Punkte A und A_1 , und die Distanz gegeben sind: den Punkt A_1 oder A , den Curs und die Längendifferenz zu finden. (§. 27.).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt A oder durch den gegebenen Punkt A_1 ziehe man eine der Längenaxe und eine der Breitenaxe parallele gerade Linie. Zwischen die Spitzen des Zirkels fasse man so viele Scalentheile der Längenaxe, wie die gegebene Breitendifferenz Minuten enthält. Die dadurch erhaltene Linie trage man von dem gegebenen Punkte aus auf die durch denselben mit der Breitenaxe parallel gezogene Linie auf, nach Norden oder nach Süden hin, jenachdem die Breite des gesuchten Punktes grösser oder kleiner als die Breite des gegebenen Punktes ist, und ziehe von dem Endpunkte des aufgetragenen Stücks aus auf der Seite der durch den gegebenen Punkt mit der Breitenaxe gezogenen Parallele, auf welcher der gesuchte Punkt liegt, mit der Längenaxe eine Parallele. Hierauf nehme man so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die gegebene Distanz Seemeilen enthält, setze den Zirkel in dem gegebenen Punkte ein, beschreibe eine Kreislinie aus diesem Punkte als Mittelpunkt mit der Zirkelöffnung als Halbmesser, und bestimme deren Durchschnittspunkt mit der vorher mit der Längenaxe gezogenen Parallele. Verbindet man diesen Durchschnittspunkt mit dem gegebenen Punkte durch eine gerade Linie, so giebt diese gerade Linie offenbar den Curs an, was nicht weiter erläutert zu werden braucht; und wenn man nun von dem Durchschnittspunkte der durch den gegebenen Punkt der Längenaxe parallel gezogenen geraden Linie mit der Breitenaxe an so viele Scalentheile der Breitenaxe abzählt, wie die Breitendifferenz der beiden gegebenen Punkte Minuten enthält, nach Norden oder nach Süden hin, jenachdem die Breite des gesuchten Punktes grösser oder kleiner als die Breite des gegebenen Punktes ist, und durch den Endpunkt der abgezählten Theile mit der Längenaxe eine Parallele zieht, so ist der Durchschnittspunkt dieser Parallele mit der geraden Linie, durch welche vorher der Curs bestimmt wurde, der gesuchte Punkt. Zieht man endlich durch denselben mit der Breitenaxe eine Parallele, so ist die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung der durch die beiden Punkte mit der Breitenaxe gezogenen Parallelen von einander die gesuchte Längendifferenz.

§. 42.

Aufgabe. Wenn der Punkt A oder A_1 , die Längendifferenz der beiden Punkte A und A_1 , und der Curs gegeben sind: den Punkt A_1 oder den Punkt A , die Breitendifferenz und die Distanz zu finden. (§. 28. und §. 29.).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt A oder den gegebenen Punkt A_1 ziehe man eine der Längenaxe und eine der Breitenaxe parallele gerade Linie, und trage an die letztere in dem gegebenen Punkte den gegebenen Curs auf dem allgemeinen Begriffe des Curses gehörig entsprechende Weise an. Von dem Durchschnittspunkte der mit der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie mit der Längenaxe an zähle man auf der letzteren nach der gehörigen Seite hin so viele Scalentheile der Längenaxe ab, wie die gegebene Längendifferenz Minuten enthält, und ziehe durch den Endpunkt der abgezählten Theile mit der Breitenaxe eine Parallele, so ist der Durchschnittspunkt dieser Parallele mit der vorher durch Antragen des Curses erhaltenen geraden Linie der gesuchte Punkt A_1 oder A . Zieht man durch diesen Punkt eine mit der Längenaxe parallele gerade Linie, so giebt die Anzahl der zwischen den durch die beiden Punkte A und A_1 mit der Längenaxe gezogenen Parallelen enthaltenen Scalentheile der Breitenaxe die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 in Minuten, und zugleich wird man aus der Karte selbst auf der Stelle erkennen, welcher der beiden Punkte A und A_1 die grössere Breite hat. Endlich nehme man so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 Minuten enthält, trage die dadurch erhaltene Linie von dem Punkte A aus auf der durch denselben der Breitenaxe parallel gezogenen geraden Linie ab, ziehe durch den Endpunkt der abgetragenen Linie mit der Längenaxe eine Parallele und messe die Entfernung des Durchschnittspunktes dieser Parallele mit der Linie AA_1 von dem Punkte A nach Scalentheilen der Längenaxe, so erhält man die gesuchte Distanz. Dass man sich bei dieser Construction der Distanz statt des Punktes A auch des Punktes A_1 bedienen könnte, fällt leicht in die Augen.

§. 43.

Aufgabe. Wenn der Punkt A oder A_1 , der Curs und die Distanz gegeben sind: den Punkt A_1 oder A , die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 und die Längendifferenz zu finden. (§. 32. und §. 33.).

Auflösung. Durch den gegebenen Punkt A oder den gegebenen Punkt A_1 ziehe man eine mit der Längenaxe und eine mit der Breitenaxe parallele gerade Linie, und trage an die letztere in dem gegebenen Punkte den gegebenen Curs auf gehörige Weise

an. Hierauf nehme man so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die gegebene Distanz Seemeilen enthält, trage die dadurch erhaltene Linie von dem gegebenen Punkte an auf die den Curs bestimmende gerade Linie auf, und ziehe durch den Endpunkt des aufgetragenen Stücks eine Parallele mit der Längenaxe. Die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung dieser Parallele von der durch den gegebenen Punkt mit der Längenaxe gezogenen Parallele giebt die gesuchte Breitendifferenz der beiden Punkte in Minuten. Zählt man nun von dem Durchschnittspunkte der durch den gegebenen Punkt der Längenaxe parallel gezogenen geraden Linie mit der Breitenaxe an auf dieser so viele ihrer Scalentheile ab, wie die gefundene Breitendifferenz Minuten enthält, nach Norden oder nach Süden hin, jenachdem die Breite des gesuchten Punktes grösser oder kleiner als die Breite des gegebenen Punktes ist, und zieht durch den Endpunkt der abgezählten Theile mit der Längenaxe eine Parallele, so ist deren Durchschnittspunkt mit der den Curs bestimmenden geraden Linie der gesuchte Punkt A_1 oder A . Endlich ist die nach Scalentheilen der Längenaxe gemessene Entfernung der durch die beiden Punkte mit der Breitenaxe gezogenen Parallelen von einander die gesuchte Längendifferenz.

§. 44.

Aufgabe. Wenn die Längendifferenz, der Curs und die Distanz gegeben sind: die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 zu finden. (§. 34.).

Auflösung. Auf der Längenaxe nehme man zwei Punkte an, in deren Entfernung von einander eben so viele Scalentheile der Längenaxe enthalten sind, wie die gegebene Längendifferenz Minuten enthält, und ziehe durch jeden derselben eine mit der Breitenaxe parallele gerade Linie. Hierauf ziehe man eine diese beiden Parallelen schneidende gerade Linie, welche gegen dieselben auf gehörige Weise unter einem dem gegebenen Curs gleichen Winkel geneigt ist, nehme so viele Scalentheile der Längenaxe in den Zirkel, wie die gegebene Distanz Seemeilen enthält, setze den Zirkel in einem der beiden Punkte ein, in welchen die beiden mit der Breitenaxe parallel gezogenen Linien von der den Curs bestimmenden geraden Linie geschnitten werden, und schneide auf der den Curs bestimmenden geraden Linie ein der Zirkelöffnung gleiches Stück ab. Zieht man nun durch den Endpunkt dieses Stücks und den Punkt, in welchem der Zirkel eingesetzt wurde, Parallelen mit

der Längenaxe, so giebt die in Scalentheilen der Längenaxe ausgedrückte Entfernung dieser beiden Parallelen von einander die gesuchte Breitendifferenz in Minuten.

§. 45.

Man könnte noch folgende Aufgabe aufstellen:

Wenn der Punkt A oder A_1 , die Längendifferenz und die Distanz gegeben sind: den Punkt A_1 oder A , die Breitendifferenz der beiden Punkte A und A_1 , und den Curs zu finden. (§. 30. und §. 31.).

Diese Aufgabe pflegt in den Schifffahrtslehrbüchern *) durch eine Art von Näherung auf der Karte aufgelöst zu werden; da dieselbe sich aber nach meiner Meinung zur graphischen Auflösung mittelst der Seekarten mit wachsenden Breiten überhaupt nicht eignet, und in der Nautik überdies gar nicht, oder nur höchst selten zur Anwendung kommt, so halte ich es für besser, die gewöhnliche annähernde graphische Auflösung derselben hier ganz zu übergehen, und lieber auf ihre in §. 30. und §. 31. gegebene analytische Auflösung zu verweisen.

Solche graphische Operationen auf den Seekarten wie die in diesem Kapitel gelehrt heissen in der nautischen Kunstsprache Besteck setzen.

*) M. s. z. B. das in §. 25. angeführte Buch von Ducom. p. 183., oder auch *Géodésie, ou Traité de la figure de la terre et de ses parties*, par L. B. Francoeur. Bruxelles. 1838. Nr. 486. VI.

Druckfehler.

S. 57 Z. 9 streiche man b in $e^2 b (\sin B - \sin B_1)$.

Druck von C. P. Melzer in Leipzig.

Grunert, Johann August,

Loxodromische Trigonometrie Ein Beitrag zur Nautik

Lpzg 1849

Math.p. 190 md

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081873-7